IV-31 多目的な水配分問題に関する数理計画法による1考察

京都大学工学部 正 員 吉川和広
京都大学工学部○正 員 岡田憲夫

1. はじめに

われわれはこれまでに広域的・多目的な水配分問題を種々の観点からとらえるとともに，主として数理計画モデルによるシステム分析の有効性とその適用の方法について検討を試みてきた。その場合数理計画法によるモデル化においては，評価すべき種々の事項のうちの1つにのみ着目してこれを評価関数として定式化するとともにそこで捨象された問題を制約条件として記述する方法がとられてきた。このような方法はそれ自体きわめて有効であるといえるが，以下に述べる理由により，少し角度を変えた視点からモデルの定式化と運用を試みる必要があると考えられる。すなわち，

①水配分問題をより広域的・多目的な視点から検討していく際には，評価すべき事項もそれだけ多岐にわたるので，何らかの形で複数の事項（目標）の評価をすることが重要になる。

②実際上は単一の目標を最適にするような解よりも複数の目標が実用上満足できる基準にまで達成していることが保証されている解に関心がある場合が多い。事実複数の目標は相互に競合していることが普通であるから，複数の目標を同時に最適にするような解は存在しないことが多い。したがってこれらの目標のそれぞれがある満足水準に達している解をもとめることが必要になってくる。

③新規開発可能量よりも新規発生水需要量（予測値）の方が大きく上回る地域においては，必ずしも全水需要量を満たすことは必要ではなく，需要量と開発水量の乖離が許容される範囲内にあればよいと考える方が妥当な場合がある。

以上のような問題を解決するために，従来から各パラメーター値の変動に対する解の変化の挙動をパラメトリックプログラミングや感応度分析によって推定する方法を補完的に用いてきた。あるいは評価関数の設定の方法を種々変えることによって異なる目標間のトレード・オフの関係を推定してきた。ここでは特に上記の②，③の観点に注目し，これまで考察してきた各種の水配分問題を，複数の目標の満足度を最大にするような解を見つける問題として見直すとともに，その場合の数理計画法的アプローチの方法について略述することにする。このような方法は一般に「目標計画法」（Goal Programming）と呼ばれている。なお具体的な問題としては，次のような広域水配分問題をとりあげて説明を行うことにする。

2. モデル化

1) 主要な前提条件

①対象地域全体として複数水系流域をとりあげる。

②各水系の上流にダム群を建設して新規水源の開発を行う。これらの候補地ならびにその規模の上限は決っている。

③各水系の下流に水需要地を設定する。換言すれば水需要量は各水系の新規取水対象水の量のことである。

④必要ならば水系間に導水路を建設して分水を認める。

⑤個々のダムおよび導水路の規模と費用の間には線形性が成立する。

2) 定式化のための準備

$i=1,\cdots,n$; $j=1,2,\cdots,m_i$; $k\in G_i$ について

$$x_{ij} \leqq C_{ij} \quad \cdots\cdots(1)$$

$$\sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} + \sum_{k\in G_i}(y_{ki}-y_{ik}) - S_i = 0 \quad \cdots\cdots(2)$$

$$S_i \geqq D_i \quad \cdots\cdots(3)$$

$$x_{ij},\ y_{ik}\,(y_{ki}),\ S_i \geqq 0$$

ここに x_{ij} = ダム(i,j)の建設規模（変数）（iは水系を表わし，jはその水系におけるダム群のうちの1つを表わす整数で，ダムの下流から数えた順番に対応している。）；C_{ij} = ダム(i,j)の建設規模の上限；$y_{ik}\,(y_{ki})$ = $i\,(k)$水系から$k\,(i)$水系へ分水する導水施設規模（変数）；S_i = i水系の下流の取水可能量（変数）；D_i = i水系の下流域設定された需要地の水需要量；G_i = i水系に隣接する水系を表わす添字の集合；n = 水系の数；m_i = i水系のダムの数

3) 複数の評価事項（目標）の設定

$$z_1 = \sum_{i=1}^{n} S_i \rightarrow \max. \quad \cdots\cdots(4)$$

$$z_2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k\in G_i} b_{ik}y_{ik} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k\in G_i} b_{ki}y_{ki} + \sum_{i=1}^{n} d_i S_i \rightarrow \min. \quad \cdots\cdots(5)$$

ここにa_{ij}=ダム(i,j)の建設費用; $b_{ik}(b_{ki})$=i(k)水系からk(i)水系へ分水する導水施設の建設費用; d_i=i水系の取水関連費用(関連河川改修費用を含む)。

すなわち(4)式は全取水可能量を最大にしたいという要求の定式化であり，他方(5)式は関連費用を最小にしたいという要求である。

3) 定式化

(a)制約条件

上記の(1),(2),(3)の条件に加えて，以下の制約条件を加える。

$$\sum_{i=1}^{n} S_i + \delta_1 - \varepsilon_1 = G_1 \quad \text{-------(6)}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k\in G_i} b_{ik}y_{ik} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k\in G_i} b_{ki}y_{ki} + \sum_{i=1}^{n} d_iS_i - \delta_2 + \varepsilon_2 = G_2 \quad \text{-------(7)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} S_i \geq g_1 \quad \text{----------(8)}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k\in G_i} b_{ik}y_{ik} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k\in G_i} b_{ki}y_{ki} + \sum_{i=1}^{n} d_iS_i \leqq g_2 \quad \text{--------(9)}$$

$$\delta_l \times \varepsilon_l = 0 \quad (l=1,2) \quad \text{--------(10)}$$

$$\delta_l,\ \varepsilon_l \geqq 0 \quad (l=1,2) \quad \text{-----------(11)}$$

$$\lambda_l = G_l - g_l \quad (l=1,2) \quad \text{--------(12)}$$

ここにδ_l, ε_l (l=1, 2)はG_l(目標の満足水準を表わす。G_lは一応十分とみなされる水準であるのに対して，g_lは許容できるぎりぎりの限界を表わす水準)からの隔りの量のうち，それぞれ不足する量を表わす変数，超過する量を表わす変数である。

(10)式を使って(8),(9)式を変形することができる。まず(6),(7)式の両辺にそれぞれδ_1, δ_2を掛けることにより

$$\delta_1\sum_{i=1}^{n} S_i + \delta_1^2 - \delta_1\varepsilon_1 = \delta_1 G_1 \quad \text{-------(6)'}$$

$$\delta_2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}x_{ij} + \delta_2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\in G_i} b_{ik}y_{ik} + \delta_2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\in G_i} b_{ki}y_{ki} + \delta_2\sum_{i=1}^{n} d_iS_i - \delta_2^2 + \delta_2\varepsilon_2 = \delta_2 G_2 \quad \text{-----(7)'}$$

を得る。これらの式に(8),(9)式を代入することにより

$$\delta_1^2 - \delta_1\varepsilon_1 \leqq \delta_1(G_1 - g_1),\quad \delta_1\varepsilon_1 = 0$$
$$-\delta_2^2 + \delta_2\varepsilon_2 \leqq \delta_2(G_2 - g_2),\quad \delta_2\varepsilon_2 = 0$$

を得る。δ_1, δ_2は非負の変数であるから上式をそれぞれδ_1, δ_2で割ってやると次式が求められる。

$$\delta_1 \leqq \lambda_1 \quad \text{-----------(8)'}$$

$$-\delta_2 \leqq \lambda_2 \quad \text{-----------(9)'}$$

(b)評価関数

$$w_1 = \sum_{l=1}^{2} \lambda_l \delta_l \rightarrow \mathrm{Min.} \quad \text{-----------(13)}$$

この評価関数は目標との乖離の度合(リグレット)を表わすδ_1, δ_2を最小にしたいという要求を表わしている。その場合のδ_1, δ_2に対する加重の割合をλ_1, λ_2の比で代用する考え方である。これの具体的な意味については講演時に詳述することにする。

3. モデルの変形

以上のようにして設定された目標計画法によるアプローチは，リグレットの評価の仕方によって若干定式化(評価関数と一部の制約条件)が異ってくる。ここでは文献1)※に従ってそのいくつかを示す。

1) モデル2

先の制約条件の他に次式を加える。

$$\lambda_2\delta_1 - \lambda_1\delta_2 = 0 \quad \text{-------(14)}$$

さらに評価関数をつぎのように設定する。

$$w_2 = \delta_1 \rightarrow \mathrm{Min.} \quad \text{--------(15)}$$

2) モデル3

先の制約条件のうち(10)式を省略する。従って(8),(9)式は(8)',(9)'式のように書き換えることはできなくなる。評価関数は(15)式と同じであるが，その意味するところは若干異ってくる。(δ_l, ε_lの意味も違ってくる。)

3) モデル4

先の制約条件のうち(10),(12)式を取り去るとともに評価関数をつぎのように設定する。

$$w_4 = \sum_{l=1}^{2} P_{J_l}\delta_{J_l} \rightarrow \mathrm{Min.} \quad \text{-------(16)}$$

ここにP_{J_l}はP_{J_1}の方がP_{J_2}よりも絶対的に大きいパラメーター値をとるもので，目標の重要度の大きいものを第1に優先した上で第2の目標の満足度を高めようとするものである。

4. 実証例による検討

具体例として兵庫県の加古川・市川・夢前川・揖保川・千種川水系全体を含む東播・西播地域の広域水配分問題をとりあげる。計算結果は講演時に説明する。

(参考文献) ※1. 伏見・山口，複数の目標をバランスよく達成するための数理計画的方法，経営科学第19巻第2号