

岡山大学工学部
京都大学大学院

正会員 ○ 河野伊一郎
井波久治

1. まえがき

地下水揚水のF.E.M.モデルでは、揚水井戸をPoint sink (またはsource) と考えることがしばしばである。すなわち、揚水井戸をnetworkの一節点に対応させ、この節点の方程式の荷重項として揚水量を考慮するという方法である。この解析結果は、揚水井戸からある程度離れた地点の地下水位低下量については妥当な値が得られるであろうことは推測できるが、揚水井戸のごく近傍では不確かであると言わねばならない。特に、揚水井戸に相当する節点の計算値が実際の水位低下量とどのように対応するのかは不明確である。なぜなら、揚水井戸をpointと考えている限り、理論的には地下水位低下量は無限大となるからであり、したがってPoint sinkとして計算された水位低下量に相当する揚水井戸の半径（これを等価半径と呼ぶ）を明らかにすることが必要である。

本文は、この等価半径がF.E.M.モデルの要素の形および大きさに関係することに注目し、それらの相関に関して考察し、数値計算により実証したものである。

2. 理論的考察

いまFig. 1に示すような、揚水井戸をとり囲む三角形要素を考える。辺 $\overline{01}$ 、 $\overline{02}$ を等しく Δl にとり、 $\angle 1-0-2$ を $\theta = 360^\circ/n$ にとると、各節点の座標は、 $0 : (0, 0)$ 、 $1 : (\Delta l, 0)$ 、 $2 : (\Delta l \cos \theta, \Delta l \sin \theta)$ となる。ここで、定常地下水流におけるF.E.M.を考えると、節点0に対する方程式はつぎのようになる¹⁾

$$\sum_{j=0}^2 P_{ij} h_j + \Delta Q_0 = 0 \quad (1)$$

ここに、 P_{ij} は浸透性行列の係数であり、 h_j は各節点の水頭である。

また ΔQ_0 は要素1-0-2が受け持つ揚水量である。

Fig. 1の要素に関して P_{ij} を計算すると、

$$P_{00} = T \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}, \quad P_{01} = P_{02} = T \frac{\cos \theta - 1}{2 \sin \theta} \quad (2)$$

となり、式(2)を式(1)に代入すると、

$$\Delta Q_0 = T \left(\frac{1 - \cos \theta}{2 \sin \theta} \right) (h_1 + h_2 - 2h_0) \quad (3)$$

節点0のまわりの n 個の要素に対して ΔQ_0 の和をとると、

$$Q_p = \sum_{j=1}^n \Delta Q_0^j = T \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right) \left(\sum_{j=1}^n h_j - n h_0 \right) \quad (4)$$

$(h_j - h_0)$ が一定値 Δh_0 とすると、式(4)はつぎのようになる。

$$Q_p = n \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right) \cdot T \cdot \Delta h_0 \quad (5)$$

一方、井戸理論より、揚水井戸の半径を r_e とすると、

$$\Delta h_0 = \frac{Q_p}{2 \pi T} \ln \frac{\Delta l}{r_e} \quad (6)$$

式(5)と式(6)より、 Δh_0 、 T を消去すると、

$$\ln \frac{\Delta l}{r_e} = \frac{2 \pi \sin \theta}{n(1 - \cos \theta)} \quad (7)$$

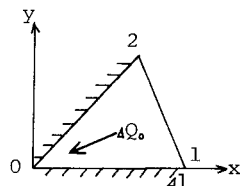
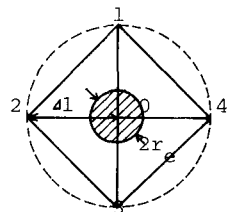
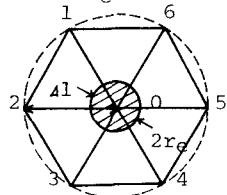


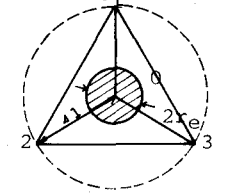
Fig.1 Triangular element



(a) $n=4$ $r_e = 0.20841$



(b) $n=6$ $r_e = 0.16341$



(c) $n=3$ $r_e = 0.29841$

Fig.2 Equivalent radius in the networks for finite element method.

すなわち、

$$r_e = C \cdot \Delta l, \quad C = \exp\left\{-\frac{2\pi \sin\theta}{n(1-\cos\theta)}\right\} \quad (8)$$

式(8)のCは、要素の形によってのみ決まる。よって、F.E.M.モデルにおける揚水井の等価半径は、これに隣接する要素の形が決まればその大きさに比例することがわかる。等価半径を要素の形に分類してまとめるとFig. 2のようになる。

3. 数値計算による検証

(1) $n=4$ の場合、すなわち要素が直角二等辺三角形の場合については、すでに文献2)によってFig. 3のように検討済みである。同図では横軸に揚水井からの距離 r 、縦軸に水位低下量 s をとっている。なお計算時の境界条件としては、揚水井のある節点の水位として単位1.0を与えている。したがって $s=1.0$ に対応する r は0.2であり、これが等価半径にほかならない。

(2) さて、2. で述べた理論が n が任意の整数をとったときに成立するかどうかを検証する必要がある。ここでは $n=6$ および $n=3$ の場合の結果を示す。Fig. 4 (a)、(b)のように領域を三角形要素に分割し、揚水井戸に相当する節点に単位の水位低下量1.0を与え、F.E.M.により領域各節点の水

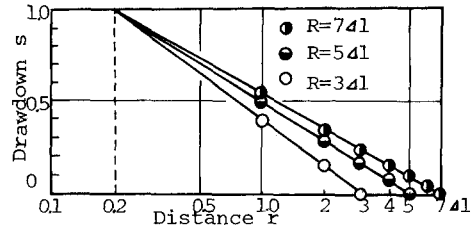


Fig. 3 Relationship between the distance from the node of a well and the drawdown

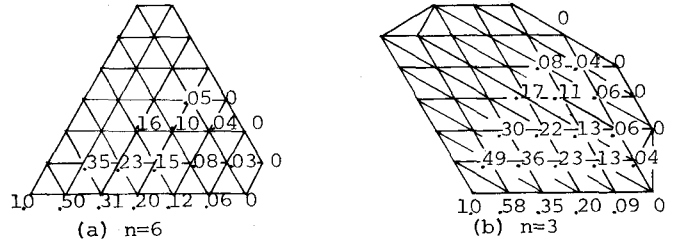


Fig. 4 Drawdowns of head calculated by the F.E.M.

低下量を求めると、Fig. 4 (a)、(b)の各節点に付した数値が得られた。これを片対数紙上にプロットすると、Fig. 5 (a)、(b)のように、それぞれ水位低下量 s と揚水井戸からの距離 r との間には直線関係があり、この直線の延長と $s=1.0$ との交点を見ると、 $n=6$ の場合は $r_e \div 0.1641$ 、 $n=3$ の場合は $r_e \div 0.3041$ となり、2. で述べた関係を満足していることがわかる。なお、 $n=3$ の結果に多少ばらつきがあるが、これは要素の形による誤差と考えられる。

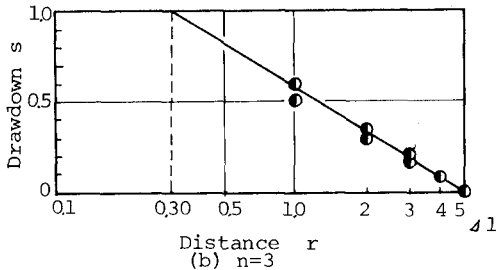
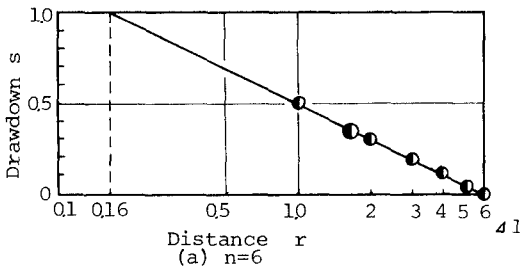


Fig. 5 Relationship between the distance from the node of a well and the drawdown

4. あとがき

地下水揚水のF.E.M.モデルにおいて、Point sinkとして計算された水位低下量は、ある半径を持つ井戸の水位低下量を示していることがわかる。その等価半径は、揚水井戸に隣接する要素の形、および大きさで決まることが理論的に明らかになり、数値解析によっても実証された。なお、本文は定常地下水流に限定して述べたが、非定常状態における揚水時に対しても、同値の等価半径が存在することを確認している。この考えを応用すれば、群井を含む地下水のF.E.M.解析における要素分割の方法、および水位低下の算定が容易になるものと思われる。

(参考文献)

- 1) 河野伊一郎：有限要素法による堤体浸透問題の解析、土と基礎、vol 21、1972、pp. 13~19
- 2) I.KONO : The equivalent radius of a source in numerical models of groundwater flow, Proc. of JSCE. No.218, OCT.1973 pp.103~107