III-233　透水問題の差分式解法について

岐阜大学工学部　正会員　宇野尚雄

1. 概説

透水現象の基礎微分方程式は連続式とダルシー則を結びつけたものであるが，これを一般の境界条件や地盤条件について解くには，電子計算機を用いて数値解析するのが普通である。本文は数値解析の一つ，差分式解法について一般に用いられている差分のとり方によっても，物理的意味を明確に把握しておかないと，意図したところとは全く異なった計算を行なう危険を含んでいる一例を報告して，参考に供したい。

2. 準一次元浸透流の基本式

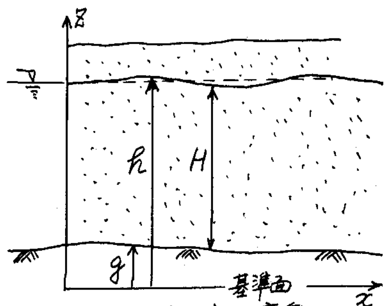

図-1 自由水面変動

図-1のような自由水面変動を考えてみよう。本文は解法上の問題を議論することが目的であるため，$h-g=H=\mathrm{const}$ なる簡単な場合を取扱うことにする。土の透水係数を k，貯留係数を β として連続の式は準一次元流（Dupuit-Forchheimerの仮定をみたす流れ）では

$$\beta\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial q_x}{\partial x}=W \qquad (1)$$

ここに　q_x：x方向の流量成分，W：補給源

運動の式としてのダルシー則は次式で与えられる。

$$q_x=-k_x H\frac{\partial h}{\partial x}=-T_x\cdot\frac{\partial h}{\partial x},\qquad ただし\quad T_x=k_x H \qquad (2)$$

式(2)を式(1)に代入すると

$$\beta\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(T_x\frac{\partial h}{\partial x}\right)+W \quad (3a),\ \text{or}\ \ \beta\cdot\frac{\partial h}{\partial t}=T_x\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial T_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial h}{\partial x}+W \quad (3b)$$

3. 二つの差分式表示

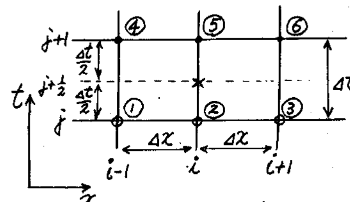

図-2 差分の格子

式(3b)を図-2の$(i, j+\frac{1}{2})$点で差分式表示すると，①$=h_{i-1}^{j}$，②$=h_{i}^{j}$，③$=h_{i+1}^{j}$，④$=h_{i-1}^{j+1}$，……と略記して，$\frac{\partial h}{\partial t}=(⑤-②)/\Delta t$，$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=\left\{\frac{④+①}{2}-2\cdot\frac{⑤+②}{2}+\frac{⑥+③}{2}\right\}/(\Delta x)^2$，$\frac{\partial h}{\partial x}=\left\{\frac{⑥+③}{2}-\frac{④+①}{2}\right\}/(2\cdot\Delta x)$ などの差分を用いて次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\beta_i(⑤-②)/\Delta t&=T_{xi}(④-2\cdot⑤+⑥+①-2\cdot②+③)/[2(\Delta x)^2]\\&\quad+(T_{x\,i+1}-T_{x\,i-1})(-④+⑥-①+③)/[8\cdot(\Delta x)^2]\\&\quad+W_i\end{aligned} \qquad (4)$$

ただし　Δx：距離間隔，Δt：時間間隔，①，②，③は既知として，④，⑤，⑥は未知とする。

式(4)を整理すると，次式が得られる。これを(A)法と仮称する。

$$-A\cdot④+B\cdot⑤-C\cdot⑥=A\cdot①+(B-2T_{xi}^{*})\cdot②+C\cdot③+W_i \qquad (5)$$

ここに　$A=\frac{1}{8}T_{x\,i-1}^{*}+\frac{1}{2}T_{xi}^{*}-\frac{1}{8}T_{x\,i+1}^{*}$，$B=\beta_i^{*}+T_{xi}^{*}$，$C=-\frac{1}{8}T_{x\,i-1}^{*}+\frac{1}{2}T_{xi}^{*}+\frac{1}{8}T_{x\,i+1}^{*}$ 　(6a)

$T_{xi}^{*}=T_{xi}/(\Delta x)^2$，$\beta_i^{*}=\beta_i/\Delta t$ 　(6b)

一方，式(3)より前の段階の式(1)と式(2)を差分表示すると，次の式(7)，(8)が得られる。

$$\beta_i^*(\textcircled{5}-\textcircled{2})+(q_{xi}-q_{xi-1})/\Delta x = W_i \qquad (7)$$

$$q_{xi} = -T_{xi}\left(\frac{\textcircled{6}+\textcircled{3}}{2}-\frac{\textcircled{5}+\textcircled{2}}{2}\right)/\Delta x \qquad (8a)$$

$$q_{xi-1} = -T_{xi-1}\left(\frac{\textcircled{5}+\textcircled{2}}{2}-\frac{\textcircled{4}+\textcircled{1}}{2}\right)/\Delta x \qquad (8b)$$

式(8)を式(7)に代入して整理すると，次式が得られ，これを(B)法とする。

$$-a\cdot\textcircled{4}+b\cdot\textcircled{5}-c\cdot\textcircled{6} = a\textcircled{1}+[b-(T_{xi}^*+T_{xi-1}^*)]\cdot\textcircled{2}+c\textcircled{3}+W_i \qquad (9)$$

ここに $a = T_{xi-1}^*/2,\ b=\beta_i^*+(T_{xi}^*+T_{xi-1}^*)/2,\ c = T_{xi}^*/2 \qquad (10)$

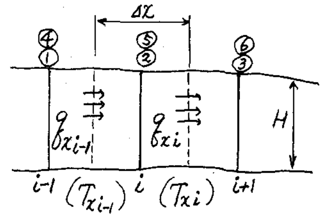

図-3 流量の差分

(A)法，(B)法のいずれも，既知量①，②，③を用いて，未知量④，⑤，⑥に関する多元連立一次方程式を作り，境界条件式を追加して，方程式を解くことにより Δt 時間後の④，⑤，⑥が求められる。

4. (A)法と(B)法の比較

両者の相違点の一つは形式上にみられ，(A)法は3つの格子点に相当する透水量係数 T_{xi-1}, T_{xi}, T_{xi+1} が3ヶあるが，(B)法では$(i-1)\sim(i)$間の透水量係数 T_{xi-1} と$(i)\sim(i+1)$間の T_{xi} の2ヶになっている。これは差分のとり方に起因するものであるが，その物理的意味を考えるため，$\frac{\partial q_x}{\partial x}=0$ の定常状態（④=①，⑤=②，⑥=③）を考えてみよう。このとき(B)法によれば $q_{xi}=q_{xi-1}$ であるから，式(8)より

$$\textcircled{2} = \frac{T_{xi-1}^*\cdot\textcircled{1}+T_{xi}^*\,\textcircled{3}}{T_{xi-1}^*+T_{xi}^*} = \frac{a\cdot\textcircled{1}+c\cdot\textcircled{3}}{a+c} \qquad (11)$$

一方，(A)法の式(5)によって定常状態の関係を $W_i=0$ として求めると

$$\textcircled{2} = \frac{A\cdot\textcircled{1}+C\cdot\textcircled{3}}{A+C} = \frac{(T_{xi-1}^*/8+T_{xi}^*/2-T_{xi+1}^*/8)\cdot\textcircled{1}+(-T_{xi-1}^*/8+T_{xi}^*/2+T_{xi+1}^*/8)\cdot\textcircled{3}}{+T_{xi}^*} \qquad (12)$$

式(11)と式(12)はいずれも a, c あるいは A, C という透水量係数を重みとした平均値を与える形式である。(B)法の a, c は式(10)のように実際の透水性を表現していることが理解される。しかし(A)法の重み A, C は合成されたようになっていて明らかでない。そこで T_{xi-1}, T_{xi}, T_{xi+1} の大小によって A, C がどのようになるか調べてみよう。

$T_{xi-1}:T_{xi}:T_{xi+1}=1:10:5$ のとき $A=\frac{1}{8}+\frac{10}{2}-\frac{5}{8}=4.5$, $C=-\frac{1}{8}+\frac{10}{2}+\frac{5}{8}=5.5$

$T_{xi-1}:T_{xi}:T_{xi+1}=10:1:5$ のとき $A=\frac{10}{8}+\frac{1}{2}-\frac{5}{8}=\frac{9}{8}$, $C=-\frac{10}{8}+\frac{1}{2}+\frac{5}{8}=-\frac{1}{8}<0$

すなわち $T_{xi-1}+4T_{xi}<T_{xi+1}$ のとき $A<0$，$T_{xi-1}>4T_{xi}+T_{xi+1}$ のとき $C<0$ となることが式(6)からわかる。このことは(A)法を用いると，合成された透水性に負の量を仮定することになり，物理的には不可解な計算をする恐れのあることを示している。(A)法は誤まっているというべきである。

5. 結語

(A)法のような，式(4)に類似した差分のとり方はJ. Rubin[1]に限らず，多くの研究者が用いているが，上記のような欠陥があるので，今後用いてはならない。4. に述べた点は図-3の流量の差分を考え，各分割領域の連続性が保たれるか，式(3a)から式(3b)への展開に際しての T_x の連続関数仮定が式(4)では無視されてはいないかという反省から生まれたものである。筆者も(A)法による計算を行なったことがあるが，しばしば不可解な発散が生じ，収束しないことがあった。それは上述の T_x が大幅に変化するところであった。FEMが最近よく用いられているが，数学的近似であるというFDM（差分法）でもその物理的意味を明らかにして用いれば，有用であると思われる。(B)法を用い始めて以来，計算が発散することはなくなった。

参考文献 1) J. Rubin : Theoretical Analysis of Two-Dimensional, Transient Flow of Water in Unsaturated and Partly unsaturated Soils, Proc. of Soil Science Society of Amer., Vol. 32, No. 5, 1968, pp. 607~615.