

1. はじめに

地盤が破壊したときに、すべり面がどの位置に発生するかという予測の問題は工学の問題として非常に重要である。すなわち、破壊が予想されるような基礎地盤や斜面の近傍に構造物を建てる場合や埋設物を設置する場合などに是非知っておきたい事項である。この問題解決のための一つのアプローチとして、筆者は以前、松尾と共に¹⁾シミュレーション手法によって若干の定性的な検討を行なったが、その後定量的な定式化に成功したのでその概略を報告する。

2. 強度の地盤内でのばらつきとその確率モデル

一般に自然の地盤は、いかに均質にみえても、理論と一致するほど均質性はない。にも拘らず、現行の設計法の大部分は、マクロ的に地盤の均質性を仮定したものであり、「工学的に一樣と判断される」として取り扱われている。このように判断された地盤であっても、例えばその非排水強度 C_u は位置的に分布しており、かつその分布は正規分布ないしは対数正規分布で近似できることが多くの研究で明らかにされている。更に、最近の Wu (1974)²⁾, Lumb (1974)³⁾ および筆者らの研究(1975)⁴⁾によると、 C_u は地盤内で位置的に独立な分布をするのではなく、強い相関を有している。特に、「工学的に一樣と判断される地盤(その広がりをも V で表わす)」の C_u は水平方向には相関は1に近く、深さ方向には相関が弱い。換言すると、地盤の水平方向に強度の均一性が高く深さ方向にはランダム性が大きい。このような知見から、 C_u の確率モデルとして次式を考えることができる。

$$C_u(z) = \mu(z) + u(z) \quad (1)$$

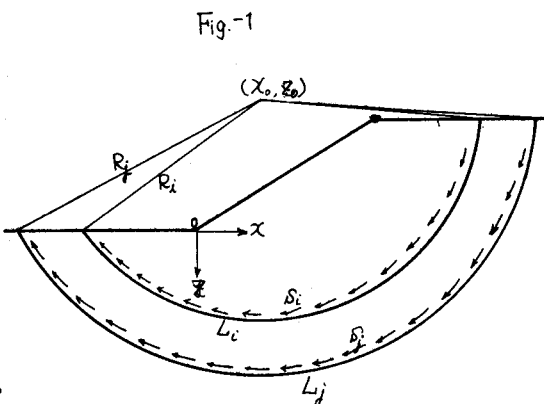
ここに、 $\mu(z)$ は深さ z に対する C_u の回帰曲線(通常は直線)を意味し、 $u(z)$ は z 方向へのランダム変数で、次式のようなエルゴード仮説が成り立つとする。

$$\left. \begin{aligned} E[u(z)] &= \frac{1}{V} \int_V u(z) dV = 0 \\ E[u(z)^2] &= \frac{1}{V} \int_V u(z)^2 dV = \sigma_c^2 \\ E[u(z)u(z')] &= \frac{1}{V} \int_V u(z)u(z') dV = r_c(\tau_z) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

上式において、 σ_c^2 は $u(z)$ の V 全体での分散、 $r_c(\tau_z)$ は $u(z)$ の自己相関関数、 $\tau_z = |z' - z|$ である。

3. すべり面位置の生起確率

ここでは、すべり面位置の生起確率を算定するための基本的な考え方を明らかにするために、すべり円弧の中心 (x_0, z_0) が固定されていて、(1)式の $u(z)$ が正規分布に従う場合について定式化する。Fig-1のように、中心 (x_0, z_0) が同一のすべり円弧 i と j について、それぞれの円弧の半径を R_i, R_j 、弧の長さを L_i, L_j 、すべり面に沿うせん断応力を δ_i, δ_j とし、 δ_i, δ_j の地盤内分布は考慮しない。このときの各円弧についての安全率を F_{si}, F_{sj} とすると、2つは式(3)で与えられる。



$$\left. \begin{aligned} F_{Si} &= R_i \int_{L_i} C_u(z_i) dL_i / S_i R_i L_i = \int_{L_i} C_u(z_i) dL_i / S_i L_i \\ F_{Sj} &= R_j \int_{L_j} C_u(z_j) dL_j / S_j R_j L_j = \int_{L_j} C_u(z_j) dL_j / S_j L_j \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

前述したように、 $C_u(z)$ は正規確率変数であるから、 F_{Si} 、 F_{Sj} は共に正規確率変数である。従って、Fig-2に示した記号を用いると、 F_{Si} 、 F_{Sj} の期待値、分散、共分散は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_{Si} &= E[F_{Si}] = \int_{L_i} E[C_u(z_i)] dL_i / S_i L_i = \int_{L_i} \mu(z_i) dL_i / S_i L_i \\ \sigma_{F_{Si}}^2 &= E[(F_{Si} - \bar{F}_{Si})^2] = \int_{L_i} \int_{L_i} E[C_u(z_i) C_u(z_i')] dL_i dL_i' / (S_i L_i)^2 = \int_{L_i} \int_{L_i} r_c(z_i z_i') dL_i dL_i' / (S_i L_i)^2 \\ E[(F_{Si} - \bar{F}_{Si})(F_{Sj} - \bar{F}_{Sj})] &= \int_{L_i} \int_{L_j} r_c(z_i z_j) dL_i dL_j / (S_i S_j L_i L_j) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

上式の結果を用いると、 F_{S1} 、 F_{S2} 、 $\dots$ 、 F_{Sn} の同次確率密度関数は次式であらわれる。

$$\left. \begin{aligned} f_{1,2,\dots,n}(F_{S1}, F_{S2}, \dots, F_{Sn}) &= (1/\sqrt{B})^n \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n b_{ij} (F_{Si} - \bar{F}_{Si})(F_{Sj} - \bar{F}_{Sj})\right] \\ B &= \det|B|, \quad B = B(b_{ij}) = A^{-1} \quad (B \text{ は } A \text{ の逆マトリックス}) \\ a_{ij} &= E[(F_{Si} - \bar{F}_{Si})(F_{Sj} - \bar{F}_{Sj})] = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ところで、ある特定の半径 R_k で破壊が生じる確率 $P_F(R_k)$ は次式で求められる。

$$\begin{aligned} P_F(R_k) &= \text{Prob}[F_{Sk} < 1.0 \mid F_{Si} \geq 1.0 \quad (i=1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n)] \\ &= \int_{-\infty}^{1.0} f_{Sk}(F_{Sk}) dF_{Sk} / \int_{1.0}^{\infty} \dots \int_{1.0}^{\infty} f_{S1, \dots, S_{k-1}, S_{k+1}, \dots, Sn}(F_{S1}, \dots, F_{S_{k-1}}, F_{S_{k+1}}, \dots, F_{Sn}) dF_{S1} \dots dF_{S_{k-1}} dF_{S_{k+1}} \dots dF_{Sn} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{1.0} \left\{ \int_{1.0}^{\infty} \dots \int_{1.0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{B}} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n b_{ij} (F_{Si} - \bar{F}_{Si})(F_{Sj} - \bar{F}_{Sj})\right] dF_{S1} \dots dF_{S_{k-1}} dF_{S_{k+1}} \dots dF_{Sn} \right\} dF_{Sk}}{\int_{1.0}^{\infty} \dots \int_{1.0}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{B}} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n b_{ij} (F_{Si} - \bar{F}_{Si})(F_{Sj} - \bar{F}_{Sj})\right] dF_{Sk} \right\} dF_{S1} \dots dF_{S_{k-1}} dF_{S_{k+1}} \dots dF_{Sn}} \quad (6) \end{aligned}$$

(6)式は、円弧の中心 (x_0, z_0) に対し、 $R_1, R_2, \dots, R_n$ の n 通りのすべり面を考えたとき、すべり面 R_k についてのみ破壊が生じて、他のすべり面では破壊しないという条件付確率を意味する。すなわち、中心 (x_0, z_0) ですべり円弧の半径 R_k であるすべり面の生起確率である。このような $P_F(R_k)$ ($k=1, 2, \dots, n$) を種々の中心 (x_0, z_0) に対して定義していくと、円弧すべり面の位置的生起確率が算定できる。また、(6)式から断定はできないが、通常の設計法で算出されるすべり面の位置、すなわち臨界円とは、一般には一致しないであろうことが想像できる。しかし、(6)式の計算は莫大な計算を要するので、具体的な数値を問題にする場合は、(6)式を簡略化する必要がある。これは今後の課題としたい。

4. 参考文献

- ① 松尾, 黒田 (1972); 土木学会第27回年講概要集 (Ⅲ-99)
- ② Wu, T.H. (1974); Proc. of ASCE, No. GT-3, pp.329 ~ 348.
- ③ Lumb, P. (1974); Soil Mechanics New Horizons, edited by I.K.Lee, Newness-Butterworths, pp.69 ~ 75
- ④ Matsuo, H., Kuroda, K. & Asaoka, A. (1975); Proc. of 2nd Int. Conf. on ASPSS (F.R.Germany)

