

III-103 還元法を用いたせん断力を受ける多層体の応力変形解析

九州大学工学部 正員 〇後藤恵二 輔

山内豊昭

学生員 山本 満

1. まえがき

舗装構造が自動車荷重をうけるとき、路面には輪荷重による鉛直圧力のみならず、自動車の発進・停止やタイヤの加速・減速に起因するせん断力が作用し、その大きさは鉛直圧力と比較して無視しない大きさに達することがある。鉛直圧力が作用するときの舗装構造内に生ずる応力および変形に関する研究は、Burmister が筆頭として多くの研究者により行われているが、せん断力が作用する場合については著者らの知る限りなく、わすかに Westman¹⁾、木村²⁾らの2層体についての研究が見られるのみである。本研究は、舗装構造をより複数の層より成る弾性体と考え、牟岐³⁾の半無限体に対する3次元弾性理論にいわゆる還元法を組合せた解法を展開し、舗装構造がその表面にせん断力を受けるときの応力および変形を解析せんとするものである。

2. 解法

図-1に示すように表面に一方せん断力を受ける多層弾性体を考え、円筒座標 (r, θ, z) を図のようにとる。オレ層の応力を $\sigma_r^i, \sigma_\theta^i, \sigma_z^i, \tau_{rz}^i, \tau_{r\theta}^i$ 、変位を u^i, v^i, w^i とすれば、これらは次のように表わされる。

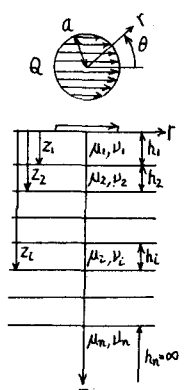


図-1

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^i &= 2\mu_i \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \left\{ (A_{mi}\xi^2 + B_{mi}\xi^2 + 2E_{mi}\xi^2 + 2F_{mi}\xi^2) e^{-\xi z} - (C_{mi}\xi^2 - D_{mi}\xi^2 + 2F_{mi}\xi^2) e^{-\xi z} \right\} \xi^2 J_m(\xi r) d\xi \right. \\ &\quad - \frac{m+1}{2r} \int_0^{\infty} \left\{ (A_{mi}\xi + B_{mi} + B_{mi}\xi z + 2E_{mi}\xi) e^{-\xi z} - (C_{mi}\xi - D_{mi} + D_{mi}\xi z - 2F_{mi}\xi) e^{-\xi z} \right\} \xi^2 J_{m+1}(\xi r) d\xi \\ &\quad \left. - \frac{m-1}{2r} \int_0^{\infty} \left\{ (A_{mi}\xi + B_{mi} + B_{mi}\xi z - 2E_{mi}\xi) e^{-\xi z} - (C_{mi}\xi - D_{mi} + D_{mi}\xi z + 2F_{mi}\xi) e^{-\xi z} \right\} \xi^2 J_{m-1}(\xi r) d\xi \right\} \cos m\theta \\ \sigma_\theta^i &= 2\mu_i \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} 2E_{mi} \xi^2 e^{-\xi z} + D_{mi} \xi^2 e^{-\xi z} \right\} \xi^2 J_m(\xi r) d\xi \\ &\quad + \frac{m+1}{2r} \int_0^{\infty} \left\{ (A_{mi}\xi + B_{mi} + B_{mi}\xi z + 2E_{mi}\xi) e^{-\xi z} - (C_{mi}\xi - D_{mi} + D_{mi}\xi z - 2F_{mi}\xi) e^{-\xi z} \right\} \xi^2 J_{m+1}(\xi r) d\xi \\ &\quad + \frac{m-1}{2r} \int_0^{\infty} \left\{ (A_{mi}\xi + B_{mi} + B_{mi}\xi z - 2E_{mi}\xi) e^{-\xi z} - (C_{mi}\xi - D_{mi} + D_{mi}\xi z + 2F_{mi}\xi) e^{-\xi z} \right\} \xi^2 J_{m-1}(\xi r) d\xi \right\} \sin m\theta \\ \sigma_z^i &= 2\mu_i \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \left\{ (-A_{mi}\xi + B_{mi} + B_{mi}\xi z - 2E_{mi}\xi) e^{-\xi z} + (C_{mi}\xi + D_{mi} + D_{mi}\xi z - 2F_{mi}\xi) e^{-\xi z} \right\} \xi^2 J_m(\xi r) d\xi \right\} \cos m\theta \\ \tau_{rz}^i &= \mu_i \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \left\{ (A_{mi}\xi + B_{mi} + B_{mi}\xi z + 2E_{mi}\xi) e^{-\xi z} + (C_{mi}\xi - D_{mi} + D_{mi}\xi z - 2F_{mi}\xi) e^{-\xi z} \right\} \xi^2 J_{m+1}(\xi r) d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} \left\{ (A_{mi}\xi + B_{mi} + B_{mi}\xi z - 2E_{mi}\xi) e^{-\xi z} + (C_{mi}\xi - D_{mi} + D_{mi}\xi z + 2F_{mi}\xi) e^{-\xi z} \right\} \xi^2 J_{m-1}(\xi r) d\xi \right\} \begin{pmatrix} \sin m\theta \\ \cos m\theta \end{pmatrix} \\ \tau_{r\theta}^i &= 2\mu_i \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} (E_{mi} \xi^2 + F_{mi} \xi^2) e^{-\xi z} \right\} \xi^2 J_m(\xi r) d\xi \\ &\quad - \frac{m+1}{2r} \int_0^{\infty} \left\{ (A_{mi}\xi + B_{mi} + B_{mi}\xi z + 2E_{mi}\xi) e^{-\xi z} - (C_{mi}\xi - D_{mi} + D_{mi}\xi z - 2F_{mi}\xi) e^{-\xi z} \right\} \xi^2 J_{m+1}(\xi r) d\xi \\ &\quad + \frac{m-1}{2r} \int_0^{\infty} \left\{ (A_{mi}\xi + B_{mi} + B_{mi}\xi z - 2E_{mi}\xi) e^{-\xi z} - (C_{mi}\xi - D_{mi} + D_{mi}\xi z + 2F_{mi}\xi) e^{-\xi z} \right\} \xi^2 J_{m-1}(\xi r) d\xi \right\} \sin m\theta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} u^i &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \left\{ (A_{mi}\xi + B_{mi} + B_{mi}\xi z + 2E_{mi}\xi) e^{-\xi z} - (C_{mi}\xi - D_{mi} + D_{mi}\xi z - 2F_{mi}\xi) e^{-\xi z} \right\} \xi^2 J_{m+1}(\xi r) d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} \left\{ (A_{mi}\xi + B_{mi} + B_{mi}\xi z - 2E_{mi}\xi) e^{-\xi z} - (C_{mi}\xi - D_{mi} + D_{mi}\xi z + 2F_{mi}\xi) e^{-\xi z} \right\} \xi^2 J_{m-1}(\xi r) d\xi \right\} \begin{pmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{pmatrix} \\ w^i &= \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \left\{ (-A_{mi}\xi^2 + 2B_{mi}\xi^2 + 2E_{mi}\xi^2 - B_{mi}\xi^2 z) e^{-\xi z} - (C_{mi}\xi^2 + 2D_{mi}\xi^2 + 2F_{mi}\xi^2) e^{-\xi z} \right\} \xi^2 J_m(\xi r) d\xi \right\} \cos m\theta \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに、 μ_i, ν_i はそれぞれオレ層のせん断弾性係数およびポアソン比であり、 $A_{mi} \sim F_{mi}$ は各層境界面の連続条件と表面の境界条件から決定される未定係数である。

いま層の境界面が粗であるとするれば、次の連続条件式が成立する。

$$z = z_i \text{ において } \sigma_z^i = \sigma_z^{i+1}, \tau_{rz}^i = \tau_{rz}^{i+1}, \tau_{r\theta}^i = \tau_{r\theta}^{i+1}, u^i = u^{i+1}, v^i = v^{i+1}, w^i = w^{i+1} \quad (3)$$

式(3)に式(1),(2)を代入整理することにより、次式をえ、任意の層の未定係数とすて最下層の未定係数で表わすことができる。

$$\{A_m, B_m, C_m, D_m, E_m, F_m\}^T = \prod_{j=1}^{n-1} (K_j^{-1} K_{j+1}) \{A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}, E_{mn}, F_{mn}\}^T \quad (4)$$

ここに、 $K_j = \begin{bmatrix} -2\mu_j \xi^4 e^{\xi z_{jm}} & 2\mu_j (1-2\nu_j + \xi z_j) \xi^2 e^{\xi z_{jm}} & 2\mu_j \xi^4 e^{-\xi z_{jm}} & 2\mu_j (1-2\nu_j + \xi z_j) \xi^2 e^{-\xi z_{jm}} & 0 & 0 \\ 2\mu_j \xi^4 e^{\xi z_{jm}} & 2\mu_j (2\nu_j + \xi z_j) \xi^2 e^{\xi z_{jm}} & 2\mu_j \xi^4 e^{-\xi z_{jm}} & -2\mu_j (2\nu_j + \xi z_j) \xi^2 e^{-\xi z_{jm}} & 2\mu_j \xi^3 e^{\xi z_{jm}} & -2\mu_j \xi^3 e^{-\xi z_{jm}} \\ 2\mu_j \xi^4 e^{\xi z_{jm}} & 2\mu_j (2\nu_j + \xi z_j) \xi^2 e^{\xi z_{jm}} & 2\mu_j \xi^4 e^{-\xi z_{jm}} & -2\mu_j (2\nu_j + \xi z_j) \xi^2 e^{-\xi z_{jm}} & 2\mu_j \xi^3 e^{\xi z_{jm}} & -2\mu_j \xi^3 e^{-\xi z_{jm}} \\ \xi^3 e^{\xi z_{jm}} & (1+\xi z_j) \xi^2 e^{\xi z_{jm}} & -\xi^3 e^{-\xi z_{jm}} & (1-\xi z_j) \xi^2 e^{-\xi z_{jm}} & 2\xi^2 e^{\xi z_{jm}} & 2\xi^2 e^{-\xi z_{jm}} \\ \xi^3 e^{\xi z_{jm}} & (1+\xi z_j) \xi^2 e^{\xi z_{jm}} & -\xi^3 e^{-\xi z_{jm}} & (1-\xi z_j) \xi^2 e^{-\xi z_{jm}} & 2\xi^2 e^{\xi z_{jm}} & 2\xi^2 e^{-\xi z_{jm}} \\ -\xi^3 e^{\xi z_{jm}} & \{2(1-2\nu_j) + \xi z_j\} \xi^2 e^{\xi z_{jm}} & -\xi^3 e^{-\xi z_{jm}} & -\{2(1-2\nu_j) + \xi z_j\} \xi^2 e^{-\xi z_{jm}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ここに、 $J_m = J_m(\xi r)$, $J_{mp} = J_{mn}(\xi r) + J_{m-1}(\xi r)$, $J_{mm} = J_{m+1}(\xi r) - J_{m-1}(\xi r)$

一方、表面の境界条件は次記である。

$$Z=0 \text{ において } \sigma_z^1 = 0, \tau_{\theta z}^1 = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(r) \sin m\theta, \tau_{rz}^1 = \sum_{m=0}^{\infty} q_m(r) \cos m\theta \quad (5)$$

式(5)に式(1)を適用し、計算を行えば、次式がえられる(ただし m の 1 項についてのみ考慮)。

$$\begin{bmatrix} \xi & 2\nu_1 - 1 & -\xi & 2\nu_1 - 1 & 0 & 0 \\ \xi & 2\nu_1 & \xi & -2\nu_1 & -1 & 1 \\ \xi & 2\nu_1 & \xi & -2\nu_1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \{A_m, B_m, C_m, D_m, E_m, F_m\}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ X_m(\xi)/2\mu_1 \xi^2 \\ Y_m(\xi)/2\mu_1 \xi^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

ここに、 $X_m(\xi) = \int_0^{\infty} [p_m(r) - q_m(r)] r J_{m-1}(\xi r) dr$, $Y_m(\xi) = \int_0^{\infty} [p_m(r) + q_m(r)] r J_{m+1}(\xi r) dr$ であり、図-1の一方せん断力の場合には $X_m(\xi) = -2QaJ_1(\xi a)/\pi a^2$, $Y_m(\xi) = 0$ となる。

最下層においては、 $Z=\infty$ で変形なしであるから、 $A_{mn} = B_{mn} = E_{mn} = 0$ である。したがって、式(4)を考慮して式(6)を解くことにより、最下層の未定係数 C_{mn} , D_{mn} , F_{mn} が決定され、

これらを用いて任意の層の未定係数 $A_m \sim F_m$ が式(4)から求められることになる。

3. 計算例

図-2に示す3層系構造を対象として、ヤング率も $E_1/E_2 = 2$, $E_2/E_3 = 2$ 、ポアソン比も $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.5$ にし、 $h_1/T = 0.2$, 0.5 , 0.8 の3種について計算を行った。

えられた結果のうち、 $a/T=1$ のときの応力 τ_{rz} , $\tau_{\theta z}$, σ_z の最大値を図-3~図-5に示す(図中、基準応力 $q_0 = Q/\pi a^2$)。

4. 結び

以上、せん断力を受ける多層弾性体の解法も還元法を用いて述べた。弾性理論も舗装構造の解析に直接用いることには疑問があるが、比較設計を行う際には、本解法も有用な資料を提供すると思われる。また、アスファルト舗装は弾性体よりはむしろ粘弾性として解析する方がより实际的であるといわれているが、かかる場合にも本解法が役立つものと考えられる。

1) Westman, R.A.: Layered Systems Subjected to Surface Shears, J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 89, No. EM6, pp.177~191 (1963).

2) 木村 孟: せん断力を受ける舗装の応力について, 土論, 第133号, pp.21~28 (1966).

3) 岸茂徳: 表面にせん断荷重を受ける半無限弾性体の三次元応力問題, 機論, 第22巻第119号, pp.468~474 (1956).

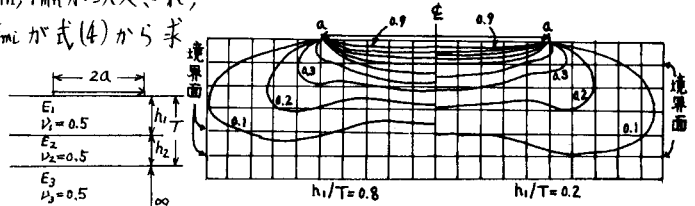


図-2

図-3 τ_{rz} の最大値 $(\tau_{rz})_{\max}/q_0$

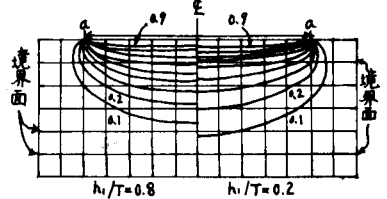


図-4 $\tau_{\theta z}$ の最大値 $(\tau_{\theta z})_{\max}/q_0$

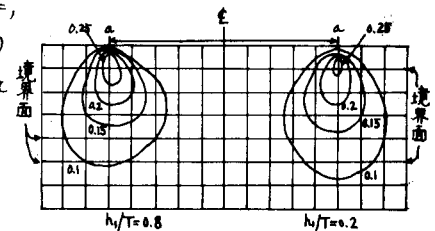


図-5 σ_z の最大値 $(\sigma_z)_{\max}/q_0$