

京都大学工学部 正員 赤井浩一
京都大学大学院 学生員 岡二三生

1) まえがき

粘性土の変形は一般にエネルギー消散をともなう。材料のエネルギー消散の効果を表現する理論としては、現在、塑性理論や粘弾性理論が存在する。動的塑性理論としてはMalvernやKármánらのものに始まり、Pergynaによって提案された三次元弾-粘塑性理論などがある。しかし、粘性土の動的塑性を定式化するのに十分であるとはいえない。本報告では、内部状態変数理論¹⁾にもとづいて構成関係を導き、粘性土に対して適用した。

2) 非弾性材料の熱力学

熱力学のオー法則であるエネルギーのフリーあい式は、

$$\rho \dot{E} - \text{tr} \rho \dot{e} = \rho r - \text{div} \rho \dot{e} \quad (1)$$

ρ : 密度, E : 内部エネルギー, $\dot{e}$: 表面からの熱供給, r : 放射熱, $\text{tr} \rho \dot{e}$: エンベロープの応力テンソル, $\dot{e}$: 変形速度テンソル。

Clausius-Duhemの不等式と(1)より、

$$\dot{\psi} - \frac{1}{\rho} E_{\theta} \dot{\theta} - \frac{1}{\rho} \dot{\theta} - \frac{1}{\rho} \dot{\theta} \geq 0 \quad (2)$$

ただし、 ψ : complementary energy, E_{θ} : ひずみテンソル, $\dot{\theta}$: エンベロープの応力テンソル, $\dot{\theta}$: エンベロープ, θ : 温度

3) 構成仮定

材料内の一点 X_K における材料の挙動は6つの応答関数によって決まるものとする。

$$\begin{aligned} \psi &= \hat{\psi}(T_{KL}, P_{KL}, \theta, g, \kappa) \\ \dot{\theta} &= \hat{\dot{\theta}}(T_{KL}, P_{KL}, \theta, g, \kappa) \\ E_{\theta} &= \hat{E}_{\theta}(T_{KL}, P_{KL}, \theta, g, \kappa) \\ \dot{e} &= \hat{\dot{e}}(T_{KL}, P_{KL}, \theta, g, \kappa) \\ \dot{P}_{KL} &= \hat{\dot{P}}_{KL}(T_{KL}, P_{KL}, \theta, g, \kappa) \\ \dot{\kappa} &= \hat{\dot{\kappa}}(T_{KL}, P_{KL}, \theta, g, \kappa) \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 g は温度勾配、 κ , P_{KL} は内部状態変数である。

(3)を微分して(2)に代入すると、 $\dot{\theta} = 0$ の場合、

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial T_{KL}} - \frac{1}{\rho} E_{\theta} \right) \dot{T}_{KL} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial P_{KL}} - \dot{P}_{KL} \right) \dot{P}_{KL} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \kappa} - \dot{\kappa} \right) \dot{\kappa} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \dot{\theta} \right) \dot{\theta} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial g} - \dot{g} \right) \dot{g} \geq 0$$

Coleman²⁾の方法でこれを扱うと、

$$\frac{\partial \psi}{\partial T_{KL}} = \frac{1}{\rho} E_{\theta} \quad (4), \quad \dot{\theta} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (5), \quad \frac{\partial \psi}{\partial g} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial P_{KL}} \dot{P}_{KL} + \frac{\partial \psi}{\partial \kappa} \dot{\kappa} \geq 0 \quad (7)$$

これらが、熱力学的制約条件である。

4) 非弾性材料に対する構成関係

(7)を満足する十分条件として、次式を仮定する。

$$\dot{P}_{KL} = M_1 \frac{\partial \psi}{\partial P_{KL}}, \quad \dot{\kappa} = M_2 \frac{\partial \psi}{\partial \kappa} \quad (8)$$

$$(M_1 \geq 0, M_2 \geq 0)$$

P_{KL} が一定の条件下において、次の積分を定義する。

$$f = \int_{T_{KL}}^{T_{KL}} M_1 \frac{\partial \psi}{\partial P_{KL}} dT_{KL} \quad (9)$$

(9)において、 $\frac{\partial \psi}{\partial T_{KL}} = \frac{\partial \psi}{\partial T_{KL}}$ のとき、

$$\dot{P}_{KL} = \frac{\partial f}{\partial T_{KL}} \quad (10)$$

(4)の両辺を微分し、 $\dot{P}_{KL} = G_{KL} \dot{\kappa}$ を仮定すると、

$$\frac{1}{\rho} \dot{E}_{\theta} = \beta_{KLST} \dot{T}_{ST} + \alpha \beta_{KLST} \dot{P}_{ST} \quad (11)$$

(10), (11)より、次の応力-ひずみ関係が求まる。

$$\frac{1}{\rho} \dot{E}_{\theta} = \beta_{KLST} \dot{T}_{ST} + \alpha \beta_{KLST} \frac{\partial f}{\partial T_{ST}} \quad (12)$$

(12)において、 β_{KLST} , $\alpha \beta_{KLST}$ おおひずみが決まれば、具体的な応力-ひずみ関係が得られる。動的な環境のもとでの関数 f を決定する方法は、Pergynaが行っているように平衡状態における関数 f_s との関係を明らかにする方法を用いる。Pergyna³⁾が彼の弾粘塑性理論に導入した F 関数の一般化の意味で、ここで新たな F 関数を導入する。これは $F=0$ の時に f が f_s に等しくなれば、 F はどんな関数であってもよい。

$$F = \hat{F}(T_{KL}, P_{KL}, \theta, \kappa) \quad (13)$$

平衡状態では、 $F=0$ であるから、 P_{KL} と T_{KL} の間には一義的関係が成立する。したがって、(12)においては

$$f = \hat{f}(F, T_{KL}, P_{KL}, \theta, \kappa)$$

$$\beta_{KLST} = \hat{\beta}_{KLST}(F, T_{KL}, P_{KL}, \theta, \kappa) \quad (14)$$

$$\alpha \beta_{KLST} = \hat{\alpha} \hat{\beta}_{KLST}(F, T_{KL}, P_{KL}, \theta, \kappa)$$

5) 正規圧密粘土に対する適用

(12)を微分、ひずみ場で書きなおすと次のようになる。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \beta_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} + \alpha \beta_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} \quad (15)$$

β_{ijkl} はスカラー関数である。さらに次のような仮定をする。

の平衡状態での f として、足立⁴⁾によって三次元に拡大された Roscoe の Original Energy Theory に基づく静的降伏関数を使う。

② f 関数を次の様に仮定する。

$$F = f - f_s = \alpha (\varepsilon_{ij}^{pp}) (\sqrt{J_2} - \sqrt{J_{2(s)}}) \quad (16)$$

ここで、 $\varepsilon_{ij}^{pp} = \beta_2 \sigma_{ij} / \sigma_y$ 、 J_2 ：偏差応力テンソルの二次不偏量。さらに $\sqrt{J_{2(s)}}$ を次のように定義する。

$$\sqrt{J_{2(s)}} = \sqrt{J_2} - \sqrt{J_{2(s)}} \quad (17)$$

静的降伏関数は σ_y を加工硬化パラメータとして、

$$f_s - K_s = \sqrt{J_2} + M^* \sigma_m \ln \sigma_m' / \sigma_{m0}' \quad (18)$$

のように表される。ただし $\sigma_m' = \frac{1}{3} \sigma_m$

(18)と(15)より、

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \beta_1 \sigma_{ij} \dot{\sigma}_m + \beta_2 \left\{ (M^* - \frac{\sqrt{J_2}}{\sigma_m}) \frac{1}{3} \dot{\sigma}_m + \frac{\dot{\sigma}_{ij}}{\sqrt{J_2}} + \alpha \frac{\dot{\sigma}_{ij}}{\sqrt{J_2}} \right\} \quad (19)$$

$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_y - \frac{1}{3} \alpha \dot{\sigma}_m$ 、 M^* ：Critical State line の傾き

三軸圧縮応力状態においては、 $\sqrt{J_2} = \frac{\sqrt{3}}{3} (\sigma_1 - \sigma_3)$ 、 $\dot{\sigma}_{ij} = \frac{2}{3} (\dot{\sigma}_1 - \dot{\sigma}_3)$ しかあって、

$$\dot{\varepsilon}_{11} = \dot{\sigma}_1 \left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \beta_2 (\alpha + 1) \right) \quad (20)$$

非排水条件より、 $\dot{\varepsilon}_{kk} = 0$ 故ら

$$\dot{\sigma}_2 \dot{\sigma}_m' + \beta_2 \left\{ (M^* - \frac{\sqrt{J_2}}{\sigma_m}) \frac{1}{3} \dot{\sigma}_m' \right\} = 0 \quad (21)$$

ここで、 $\frac{1}{\beta_2 \sigma_m'} \dot{\sigma}_m' = \dot{\sigma}_{ij} + \frac{1}{3} \alpha \dot{\sigma}_m \dot{\sigma}_{ij}$ とした。

6) パラメータの性質

図-1は、非排水クリープ試験の結果である。図中 σ_m' は圧縮圧力である。図より、ひずみレベルが等しければ、半対数紙上において、 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ と $\frac{\sqrt{3}}{2} (\sqrt{J_2(s)} - \sqrt{J_2(s)}) / \sigma_m' = (\sigma_1 - \sigma_3) / \sigma_m'$ は比例することがわかる。しかたして、パラメータ β_2 は

$$\beta_2 = C_0 (\varepsilon_{ij}^{pp}) \exp \left(\frac{m(\varepsilon_{ij}^{pp})}{\sigma_m'} F \right) \quad (22)$$

と表される。次に(20)に村山らによって提案された、応力緩和時の実験式(23)を代入する。

$$\sigma_r(\varepsilon_{ij}, t) - \sigma_r(\varepsilon_{ij}, t_0) = -\beta(\varepsilon_{ij}) \log(t/t_0) \quad (23)$$

$$\frac{m(\varepsilon_{ij}^{pp})}{\sigma_m'} \frac{\beta}{2.303} = 1, \quad \frac{2}{3} \frac{\beta \sigma_r}{2.303} = C_1 t_0 \quad (24)$$

ただし、 $\sigma_r = (\sigma_1 - \sigma_3) / \sigma_m'$ 、 $C_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} C_0 (1 + \alpha)$ とした。(24)よりパラメータ $m(\varepsilon_{ij}^{pp})$ の導出が推定できる。定速せん断時の実験

式は応力緩和時の実験式と近似的に等しくなることが、赤井、足立らにより指摘されていることから、(20)は定速せん断時の挙動とも説明する。次に(23)と(21)に代入すると、

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_2 \dot{\sigma}_m' &= -\beta_2 \left(M^* - \frac{\sqrt{J_2}}{\sigma_m'} \right) \\ &= -C_2 \exp \left\{ \frac{m}{\sigma_m'} \frac{\beta}{2.303} \ln(t/t_0) \right\} \\ &= -C_2 \frac{t_0}{t} \end{aligned} \quad (25)$$

ただし、 $C_2 = C_0 (M^* - \sqrt{J_2} / \sigma_m')$ 。

(25)を積分すると、 $\sigma_m' = -A \ln(t/t_0) + \sigma_{m0}'$ となる。こ

こで応力緩和時に応力経路が主応力軸に平行になることを考慮すると、 $A = \frac{1}{3} \frac{\beta}{2.303}$ となる。ただし、

$C_2 = \sigma_2 A / t_0$ 。(25)より $C_1 = 2.303 \sigma_2 / \sigma_2$ となる。以上

より、9つのパラメータ、 $\sigma_1, \sigma_2, C_1, \beta, \sigma_m', M^*, K, \lambda$ と C_0 が決まると、正規圧縮土の動的挙動が決定されることになる。ただし、 σ_m' は圧縮圧力、 t_0 は初期間

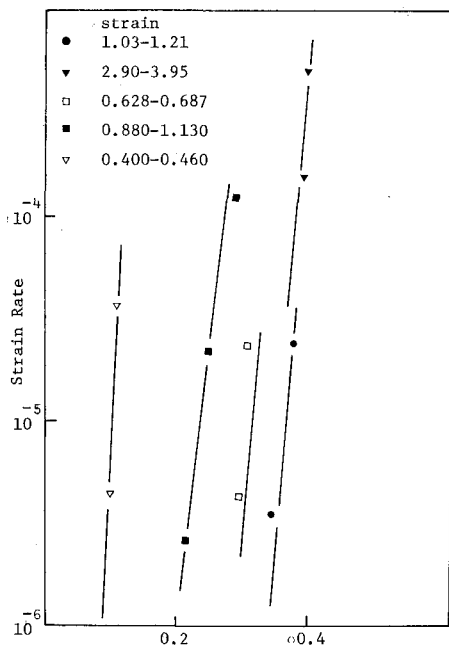


Fig.1 $(q - q_s) / q'_me$ (after Okano⁶⁾)

参考文献

- 1) Coleman, B.D and M.E. Gurtin, J. chem. Phys., Vol. 47, No. 2, 1967, pp. 597-613. 2) Coleman, B.D. and W. Noll, Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 13, 1963, pp. 167-178. 3) Perygna, P., Proc. Vibrational Problems, Warsaw, Vol. 4, No. 3, 1963, pp. 281-290. 4) 足立 定彦 "土質材料の動的降伏曲面について" 才8回土質工学研究発表会講演集, 1973, 85. 5) 村山 関口 上田 "粘土の応力緩和特性について" 土木学会関西支部年次学術講演集, pp. III-1-1 ~ III-1-4. 6) Okano, M.; Study on Deformation of Fully Saturated Clay from a view of Viscoplasticity, M. S. Thesis (Kyoto Univ.), 1972.