

III-11 砂の応力増分・ひずみ増分関係

東北大学 工学部 諸戸靖史

金属塑性論の手法を用いて砂の変形を記述することの不充分性を説明し、砂の変形を応力増分・ひずみ増分関係で書いた。そして、非排水応力経路の意味などにつき新たな考察を加えた。

1. 塑性理論の限界

材料の応力とひずみの関係を調べそれを統一的に表現することは工学における基本的重要事項である。しかるに砂のような材料の応力とひずみの関係を満足のいくまでに表現することは容易ではない。ただ、圧密試験とかせん断試験といったある限られた状況における土の変形は比較的容易に数式近似がなされている。圧密試験結果に対しては、半対数あるいは両対数表示式が用いられている。またせん断試験結果に対しては双曲線表示式や指数関数表示式が用いられている。

土の変形を統一的に行おうとする試みは Cambridge 大学の研究者らによつてなされてきたが、その試みの基礎は金属塑性論である。そこでは、応力とひずみの関係は

$$d\varepsilon_i = \frac{\partial g}{\partial \sigma_i} d\sigma_i \quad (1) \quad \begin{array}{l} g: \text{塑性ポテンシャル} \\ f: \text{降伏関数} \end{array} \quad \begin{array}{l} d\varepsilon_i: \text{ひずみ増分} \\ \sigma_i: \text{応力} \end{array}$$

と書かれている。通常式(1)で $g=f$ とおくと取り扱いが非常に簡単になるがそのような仮定が用いられている。この考えに従って整備された砂の変形モデルが Granta-Gravel である。Poorooshasb²⁾ は Granta-Gravel を改良した砂の変形モデルを発表した。その方法は $g \neq f$ とするものである。竜岡³⁾ は Granta-Gravel と Poorooshasb の降伏条件を採点した。Granta-Gravel の降伏関数は

$$f = \bar{\sigma} + M \ln p' \quad \text{であり、Poorooshasb のものは} \quad f = \bar{\sigma} + m \ln p' \quad \text{である。} \quad (2) \quad (3)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{2}{3} p' \quad (\text{応力比}), \quad \bar{\sigma} = \sigma_1 - \sigma_3, \quad p' = \frac{1}{3}(\sigma_1' + 2\sigma_3')$$

$$m: \text{定数} \quad (m < M)$$

$$M: \text{critical state の } \bar{\sigma}/p'$$

砂の三軸圧縮試験結果に照し合わせて、Granta-Gravel と Poorooshasb の仮定を調べてみると次のようである。

いま、図-1におけるA点から応力変化があった。応力経路 $\overline{AB}$ に対しては両者の理論は正しい。しかし、 $\overline{AD}$ に対しては Poorooshasb のものは全く正しく、Granta-Gravel は全く正しくない。問題となるのは応力経路が $\overline{AC}$ の場合である。実験結果は、塑性体積ひずみ ν^p が生じて

いるが塑性せん断ひずみ γ^p は生じていない。したがって、Granta-Gravel は体積変化については正しく、せん断変形に対しては正しくない。一方 Poorooshasb のものは反対に、せん断変形に対して正しく、体積変形について正しくない。

Poorooshasb の降伏条件が実情に合わないのはこの点にあるが、このことは当然といえば当然である。体積変化はダイレイタンスによる成分と等方圧縮による成分とからなっている。

$\overline{AC}$ の応力経路では塑性せん断変形は生じなくても、平均主応力 p' の増大があるわけである。したがって、この区間で

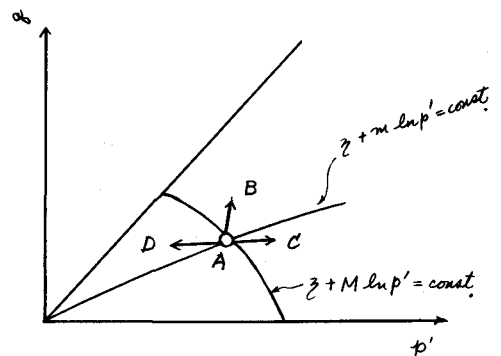


図-1 模式図

塑性体積変形が起っていても別におかしくない。要するに、せん断と圧密を統一的に表現する降伏条件を設定することは無理であることに気がつく。このことは、塑性理論と適用して砂の変形を完全に表現することが不可能であることを示している。以上は復習である。

2. 応力増分・ひずみ増分関係式

塑性理論のような高級な手段を用いて砂の変形を整理するのではなく、簡単にひずみの増分と応力の増分とに対応させる方法が最も理解しやすいように思える。Skempton⁴⁾や最上⁵⁾はそのような方法により土の変形を書いている。Holbec⁶⁾や筆者⁷⁾は砂の弾性的な変形の記述にそのような関係式を用いている。このような関係は一般に

$$d\epsilon_i = B_{ij} d\sigma_j' \quad B_{ij} : \text{係数} \quad d\sigma_j' : \text{有効応力増分} \quad (4)$$

と書けるが、ここでは三軸試験を対象にして

$$d\epsilon = A(p') G(\xi) d\xi + C(p') B(\xi) dp' \quad , \quad d\epsilon = \frac{2}{3} (d\epsilon_1 - d\epsilon_2) \quad (5-a)$$

$$d\nu = D(\xi) A(\xi) G(\xi) d\xi + C(p') E(\xi) dp' \quad , \quad d\nu = d\epsilon_1 + d\epsilon_2 + d\epsilon_3 \quad (5-b)$$

と書いてみる。この $d\epsilon$, $d\nu$ の中には塑性的な変形と弾性的な変形が含まれている。ここでは、それらの両成分を分離して表現するのではなく、まとめて取り扱うことを特徴とする。式(5-a, b)の中の係数については紙中の都合で論じないことにする。

ここで、式(5-a)の両辺を $A(p') \cdot B(\xi)$ で割り積分した関数を

$$F_\epsilon(p', \xi) = \int \frac{G(\xi)}{B(\xi)} d\xi + \int \frac{C(p')}{A(p')} dp' \quad (6-a)$$

とし、式(5-b)の両辺を $A(p') \cdot E(\xi)$ で割り積分した関数を

$$F_\nu(p', \xi) = \int \frac{D(\xi) \cdot G(\xi)}{E(\xi)} d\xi + \int \frac{C(p')}{A(p')} dp' \quad (6-b)$$

とする。 $F_\epsilon(p', \xi) = \text{const.}$ で示される状態は (p', ξ) 応力平面上で一義的に定まる曲線群を形成する。この曲線群は Poorooshasb の降伏条件に近い形をしている。 $F_\nu(p', \xi) = \text{const.}$ で示される状態は (p', ξ) 応力平面上に等体積応力経路を一義的に指定する。Granta-Gravel の降伏条件はこのようなもの一つである。

排水試験結果から $F_\epsilon = \text{const}$ 状態線、および $F_\nu = \text{const}$ 状態線と求め、定体積試験結果と比べることは有効応力の原理の検証に用いられるであろうし、また $F_\epsilon = \text{const}$, $F_\nu = \text{const}$ 状態を実験的に求め、逆算的に、有効応力の原理に基づく応力・ひずみ関係式を構成していくことも可能となるように思う。また、式(6-b)は工学的にみても重要な非排水応力経路の意味を与えている。実験結果との対比は当日説明する。

- 参考文献 1) たとえば, Schotfield, Wroth (1968) 「Critical State Soil Mechanics」, McGraw-Hill,
2) Poorooshasb, H.B. (1971): Deformation of sand in triaxial compression, T3 3P 会議, 763
3) 竜風文夫(1973): 三軸装置における砂の応力-歪特性(第五報), 土質工学研究発表会前刷り, 4) Skempton, A.W. (1954): The pore-pressure coefficients A and B, Geot. 4, 7143, 5) 最上武雄(1973): 砂の応力・ひずみ関係について,
6) Holbec, I. (1968): Elastic behavior of cohesionless soil, Jour. SM Div, ASCE, SM 3, p. 137
7) 諸戸靖史(1972): 砂の弾性的な変形特性, 土質工学論文報告集, Vol. 12, No. 3, p. 65