

中央大学 理工学部 正員 林 泰造
中央大学 理工学部 学生員 〇 山 田 正

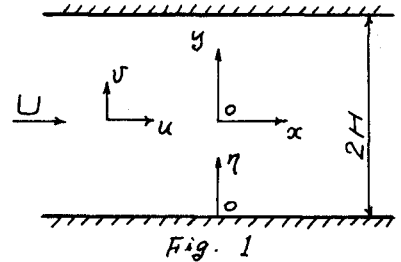
1. 要旨

本研究は、Fig. 1の様な乱流場に対し、(i) 乱流の2次元性、(ii) 変動速度は主流に比べ、十分小さい。なる“弱い乱流”という2つの仮定を用い、この2次元乱流場の中で、乱流の特性量(スペクトル、乱流強度等)の分布を2重Fourier変換の手法を用いて解析的に導き出し、合せ若干の考察を行なうのである。

2. 解析

仮定の(i)より基礎方程式としては2次元Navier-Stokes eqsと。
連続の方程式を用いる。さらに流速、圧力の項を(1)式の如く表す。

$$\left. \begin{aligned} u &= U(y) + u'(x, y, t) \\ v &= v'(x, y, t) \\ p &= P(x, y) + p'(x, y, t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$



以下の途中までは従来より研究されて来た層流の安定不安定問題の過程と全く同一のものであるが、しかし安定問題が本質的に固有値問題であるのに対し、ここでは別の様な取扱いは行われない。次に仮定の(ii)より基礎方程式を変動項(式(1)の')を付けたもの)に関し、2次以上の項を無視する事により線型化し(2)-(4)式を得る。

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{dU}{dy} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} = \nu \nabla^2 u' \quad (2)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} = \nu \nabla^2 v' \quad (3)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

(2), (3) 式から圧力の項を消去すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right] + U \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right] - v' \frac{d^2 U}{dy^2} = \nu \nabla^2 \left[\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right] \quad (5)$$

ここで、変動流速 u', v' を、振動数 f と、波数 μ に関し、2重Fourier変換し、(6), (7) 式を得る。

$$u^*(\mu, y, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u'(x, y, t) \cdot \exp[-i\mu x - ift] dx dt \quad (6)$$

$$v^*(\mu, y, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v'(x, y, t) \cdot \exp[-i\mu x - ift] dx dt \quad (7)$$

$$(6), (7) \text{ 式を(4), (5) 式に代入すると、(4) 式は } i\mu u^* + \frac{dv^*}{dy} = 0 \quad (8)$$

$$(5) \text{ 式は、} \left(i\frac{\nu}{\mu} \right) \frac{d^4 v^*}{dy^4} + \left[\left(\frac{f}{\mu} + U \right) - 2i\mu\nu \right] \frac{d^2 v^*}{dy^2} = \left[(f\mu + \mu^2 U + \frac{d^2 U}{dy^2}) - i\mu^3 \nu \right] v^* \quad (9)$$

又 $f/\mu = -C$ (C : convective vel.) を用い、(8) 式を(9) 式に代入すると、(10) 式となる。

$$\left(i\frac{\nu}{\mu} \right) \frac{d^4 v^*}{dy^4} + \left[U - C - 2i\mu\nu \right] \frac{d^2 v^*}{dy^2} - \left[\mu^2(U - C) + \frac{d^2 U}{dy^2} - i\mu^3 \nu \right] v^* = 0 \quad (10)$$

さらに(10) 式を無次元化するために、次の如き無次元量を導入する。 $\eta = | -181/H, U = U(y)/U_{max}$
 $\alpha = \mu H, Re = H U_{max} / \nu$, これらを用いると(10) 式は次の(11) 式となる。

$$(U-C)(V^{*''} - \alpha^2 V^*) - U''(\eta) V^* = -\frac{i}{\alpha Re} (V^{*''''} - 2\alpha^2 V^{*''} + \alpha^4 V^*) \quad (11)$$

(11) 式は層流の安定問題に表れる Orr-Sommerfeld eq. である。

研究の第一段階として、今、 $\alpha Re \rightarrow \infty$ (非粘性), $U'' = 0$ (流速分布に直線を仮定) の場合を考へてみる。このとき (11) 式は $V^{*''} - \alpha^2 V^* = 0$ (12) となる。(12) 式からは $e^{\alpha\eta}$ と $e^{-\alpha\eta}$ の2つの基本解が得られることより、一般解として、 $V^*(\alpha, \eta) = A(\alpha)e^{-\alpha\eta} + B(\alpha)e^{-\alpha\eta}$ と表し得る。ここに現象に適した解を考えると $B(\alpha) = 0$ となり $V^*(\alpha, \eta) = A(\alpha)e^{-\alpha\eta}$ (13) となる。又 (13) 式を (8) 式に代入する事により、 $U^*(\alpha, \eta) = iA(\alpha)e^{-\alpha\eta}$ (14) となる。ここで一般にスเปクトルは (15) 式により得られる。 $S_u(\alpha) = \langle U^*(\alpha) \cdot \tilde{U}^*(\alpha) \rangle$ (15), $\langle \rangle$ は ensemble average, $\tilde{U}^*$ は U^* の共役複素数と意味している。

(15) 式より U, V に関するスペクトルを作ると、 $S_u(\alpha, \eta) = \langle A^2(\alpha) e^{-2\alpha\eta} \rangle = \langle A^2(\alpha) \rangle e^{-2\alpha\eta}$ 同様に $S_v(\alpha, \eta) = \langle A^2(\alpha) \rangle e^{-2\alpha\eta} = S_u(\alpha, \eta)$ (16)

(16) 式で、何らかの(境界)条件を用いて $\langle A^2(\alpha) \rangle$ を知らねばならない。このため、粘性底層の端点 $\eta = \eta_*$ において U, V に関するスペクトル形を次の様に与えることとする。つまり $1 = \int_0^\infty F(\alpha) d\alpha$ が成立する意味での正規化されたスペクトル $F(\alpha)$ として δ 型を選ぶこととする。このとき $S_u(\alpha, \eta_*)$ は (17) 式で表される。 $S_u(\alpha, \eta_*) = \overline{U'^2(\eta_*)} \delta(\alpha - \alpha_0)$ (17)

ここに、 δ はデルタ関数と、 α_0 としては左側の場の最大値に相当する無次元波数を意味する。

次に (16), (17) 式より $\langle A^2(\alpha) \rangle$ を消去すると、

$$S_u(\alpha, \eta) = \overline{U'^2(\eta_*)} \delta(\alpha - \alpha_0) e^{-2\alpha(\eta - \eta_*)} \quad (18)$$

(18) 式を積分する事により (19) 式を得る。

$$\overline{U'^2(\eta)} / \overline{U'^2(\eta_*)} = e^{-2\alpha_0(\eta - \eta_*)} \quad (19)$$

Laufer, Klebanoff 等の実験結果と比較して、 $\overline{U'^2(\eta_*)}$ としては $2 \sim 3 U_*^2$, α_0 としては $\alpha_0 = 1$ と取る事が妥当であると思われる。よって

$$\sqrt{\overline{U'^2(\eta)}} / U_* = 2.2 e^{-\eta} \quad (20)$$

同様に V に関しても $\sqrt{\overline{V'^2(\eta_*)}} = 1.7 U_*$, $\alpha_0 = 1$ とおくと

$$\sqrt{\overline{V'^2(\eta)}} / U_* = 1.7 e^{-\eta} \quad (21)$$

ここに U_* は shear velocity である。(20), (21) 式と上記の実験値とを Fig. 2 と Fig. 3 に掲げておく。

3. 考察 Fig. 2, Fig. 3 に示す如く, (20), (21) 式は実験結果とかなりの一致を見える。今後は、流速分布に実際の分布に近い関数形を与え、又、スペクトルも実験値を入れろなどして、より厳密な研究をしてゆきたいと、考えている。

4. 参考文献 1) Ljatkher, V.M. Fluid Dynamics

VOL 2, NO. 5, Sept-Oct. 1967

2) Ljatkher, V.M. Proceedings, XII th, IAHR Congress (Fort Collins) vol 2. 1967

3) Laufer, J. NACA TR 1174 1954

4) Klebanoff, P.S. NACA TR 1247 1955

