

京都大学工学部 正員 岩佐 義訓

〃 〃 〃 〇井上 和也

京都大学大学院 学修員 片山 猛

前報までは、洪水流を中心とする比較的变化の緩やかな非定常流を対象として、その数値シミュレーション法についての考察であったが、本報は、これらと異なり、変化の急な岸上昇流および流れが射流の場合のシミュレーションについて検討したものである。

1. 基礎式

簡単のため、広長方形断面の一樣水路とし、径深が水深と近似されるものとする。このとき、流れの基礎式は次式で与えられる(図1参照)。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = Q \quad (1), \quad U = \begin{bmatrix} h \\ U \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} Uh \\ g(h + U^2/2g) \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 \\ g(S_0 - S_f) \end{bmatrix}$$

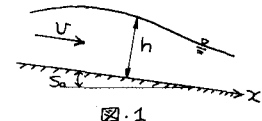
ここで、 $S_f = n^2 U^2 / h^{4/3}$ としておく。

2. 岸上昇流の数値シミュレーション

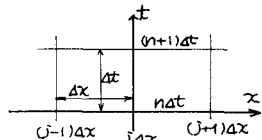
シミュレーションに用いた差分法はつぎの2つである(図2参照)。

2 step Lax-Wendroff 法:

$$U_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{U_j^n + U_{j+1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{j+1}^n - F_j^n) + \frac{\Delta t}{4} (Q_{j+1}^n + Q_j^n), \quad U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2}^{n+1/2} - F_{j-1/2}^{n+1/2}) + \frac{\Delta t}{2} (Q_{j+1/2}^{n+1/2} + Q_{j-1/2}^{n+1/2}) \quad (2)$$



図・1

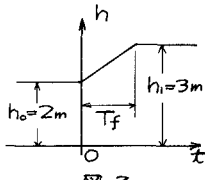


図・2

特性曲線法(常流の場合):

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{j+1}^n - F_{j-1}^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{1}{2C} (A - UE) \right]_j^n (F_{j+1}^n - 2F_j^n + F_{j-1}^n) + \frac{\Delta t}{4} (Q_{j+1}^n + 2Q_j^n + Q_{j-1}^n) - \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{1}{2C} (A - UE) \right]_j^n (Q_{j+1}^n - Q_{j-1}^n) \quad (3)$$

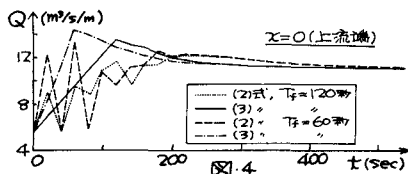
ただし、 $C = \sqrt{gh}$, $F = AU$, $A = \begin{bmatrix} U \\ h \end{bmatrix}$ である。また、(2)式では境界点の計算ができないので、そこでは Box scheme を併用することにした。さて、岸上昇流の例として、 $S_0 = 0.002$, $n = 0.025$ の水路の上流端に、図3の水深変化を与えた場合の計算を行なった ($\Delta t = 20$ 秒, $\Delta x = 400$ m)。また、計算区間は $0 \leq x \leq (U_0 + \sqrt{gh_0})t$ に限られている ($U_0 = 1/2 \sqrt{g h_0^{3/2}}$)。



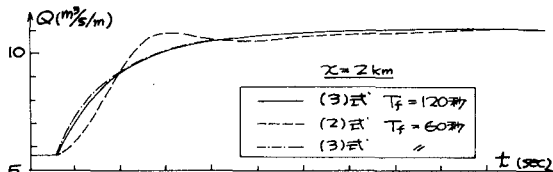
図・3

上流端の流量 前報において、上流端に Box scheme を用いると、流量に若干誤差の生ずることを述べた。図4は、(3)式および Box scheme を併用した(2)式による上流端の流量の変化を示したもので、特性曲線法では滑らかな変化を示すのに対し、Box scheme では計算ステップごとに増減する変動が現われている。これは Box scheme による計算誤差であるが、上流端では水深は一定 ($h_1 = 3$ m) に保たれているため、流量も一定値に漸近している。問題は初期の計算誤差の下流への伝播であろう。図5は $x = 2$ km における $Q-t$ であって、計算法による若干の差はみられるが、計算ステップごとの変動はなく、滑らかな曲線が得られている。これから、上の計算誤差は比較的速く減衰するとみなされる。

波伝の水深変化の水面形 波伝 ($x = (U_0 + \sqrt{gh_0})t$) での水深変化 $\partial h / \partial t$ がつぎの K の値より大きいとき、水面こう



図・4



図・5

配は漸増し, bore が発生するとされている²⁾。

$$K = \left(\frac{2}{3}\right) \lambda h_0 (1 - \frac{2}{3} Fr) (1 + Fr) \quad \dots (4)$$

ただし, $\lambda = 9S_0/U_0$, $Fr = U_0/\sqrt{gh_0}$ である。上述の計算の場合, $K = 8.65 \times 10^3 \text{ m/sec}$ であり, 一ノ上流端の本深の変化率(図3)は, $T_f = 120$ 秒のとき $8.33 \times 10^3 \text{ m/sec}$, $T_f = 60$ 秒のとき $1.67 \times 10^3 \text{ m/sec}$ であるから, $T_f = 60$ 秒の場合に bore が発生すると予想される。しかし, 水面形を示した図6にみられるように, $t = 10$ 分においてすでに, (2)

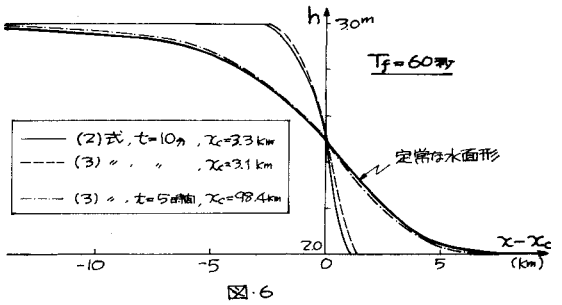


図6

式, (3)式のいずれの計算結果もほぼ一致した滑らかな水面形を示し, 不連続的な bore はみられない。上流端の本深変化が小さいとして得られる線型解による水深変化は, $h = h_0 + m(t - \frac{2}{3}(U_0/\sqrt{gh_0})) \exp(-\frac{\lambda x}{\sqrt{gh_0}} \frac{1 - \frac{2}{3} Fr}{1 + Fr})$ であり ($m = \partial h / \partial t|_{x=0}$)。この式から $Fr < \frac{3}{2}$ のとき, 波長の本深変化は m の大小にかかわらず減衰することになる。これから, 上述の bore は発生してもかなり短い区間に限られ, 減衰して連続な水面形になることになり, 数値計算上も図6の連続な水面形および従来の計算誤差の減衰が得られたと考えられる。時間が十分経過したとき, 岸線上昇波は一定の伝播速度を有する定常な水面形に漸近することになる。図6に示されるように数値計算の結果も定常な水面形に近い形状を示し, このことからここでの計算は妥当なものと考えることができる。

3. 射流のシミュレーション

流れが射流の場合, 二本の特性曲線はいずれも下流側へ向うから, (3)式の誘導で考えられた x -方向の差分のとりえにこのことを考慮すると次式が得られる。

特性曲線法(射流の場合):

$$U_j = U_j^0 - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_j^0 - F_{j-1}^0) + \frac{\Delta t}{2} (\xi_j^0 + \xi_{j-1}^0) \quad \dots (5)$$

(5)式を線型化し, $U = \hat{U} e^{ikx + \sigma t}$ とすると,

$$\det |G - e^{\sigma \Delta t} E| = 0 \quad \dots (6)$$

が得られる。ただし, G は増幅行列で,

$$G = E - A(1 - e^{-ik\Delta x}) \frac{\Delta t}{\Delta x} + \lambda B \frac{\Delta t}{2} (1 + e^{-ik\Delta x}) \quad \dots (7)$$

である。($A = \begin{bmatrix} U_0 & h_0 \\ g & U_0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4U_0^2/3h_0 & -2 \end{bmatrix}$)。

(6)式から, $e^{\sigma \Delta t}$ は G の固有値に等しく, $\text{Re}(\sigma_0) =$

$(1/\Delta t) \log |G|$ となり, 安定性が検討される。一ノ射流では流れが不安定になりやすく, 流れが(4)式で表わされるとき, $Fr > \frac{3}{2}$ で不安定とすることが知られている²⁾。

すなわち, 微小な擾乱を $U = \hat{U} e^{ikx + \sigma t}$ とするとき, (1)式より次式が得られ, $\text{Re}(\sigma) > 0$ の条件より上の安定限界が導かれる。

$$\det |\sigma E + ikA - \lambda B| = 0 \quad \dots (8)$$

さて, $Fr > \frac{3}{2}$ のときの(5)式の安定性を見るための例として, $\Delta t/\Delta x$ を一定 (0.4) に保って, Δx を小さくしたときの(6)式の二根の実部を $k\Delta x$ の小さい範囲に限って示したのが図7.1, 7.2 である。図には, (2), (3)式についての同様の結果も示されており, また(8)式の計算結果も示されている。図より, 波数が小さいとき, $\text{Re}(\sigma_0) > 0$, すなわち $|G| > 1$ となり, この波数の擾乱は発生することがわかる。また, 図7.2 より, 波数が大きいとき(3)式の $\text{Re}(\sigma_0)$ は急速に大きくなり射流の計算法として不適当なことが知られる。以上のように, 射流の計算の安定性には, Fr が関係し常流の場合よりさらに複雑になると考えられる。

文献 1) 若佐, 田中, 昭和49年度年報 / 2) Lighthill, Whitam, Proc. Roy. Soc. London, Vol. 229, 1955 / 3) 若佐, 工学誌, 40-6, 1955