II-189 開水路網における定常流れの解析法について

京都大学工学部 正員 岩佐 義朗
京都大学工学部 正員 綾 史郎
京都大学大学院 学生員 山本 正幸

1. はじめに 低平地における開水路網内の緩流速の定常流の流量解析法については，2，3の研究がみられるが，管路網における研究にくらべれば，まだ多くの改良すべき点があると思われる。本報では，開水路網を一つのネットワーク・システムと考えてモデル化し，Newtonの近似法を用いて流量解析する手法について報告する。なお水路網は，長方形の一様断面水路から構成されているものとする。

2. 水路網のモデル化

水路網を，水路の境界，分岐合流断面，断面変化部の上下流断面，および適当な断面を節点にえらび，これらの節点間を実際の水路に従って枝で結ぶと水路網はグラフ G で表現される。（節点数 m，枝数 n）

各枝において，エネルギー保存則はつぎのように書かれる。[1]

$$-\{E(n,n)-F(n,n)\}A^T(n,m)h(m) = A^T(n,m)z(m) - h_l(n) \qquad (1)$$

あるいは

$$h_d(n) = A^T(n,m)\{h(m)+z(m)\} = F(n,n)A^T(n,m)h(m) + h_l(n) \qquad (2)$$

ここに，E；単位行列，F；$Q_i^2/gA_{mi}^2h_{mi}$ を対角要素とする対角行列，A^T；接続行列の転置行列，h，z；それぞれ節点の水深，水路床高さを示すベクトル，h_l；種々のエネルギー損失を示すベクトル，h_d；節点間の水位差を示すベクトル。また，添字 m はこの量が枝の両端の水深の平均値 $h_m=\frac{1}{2}(h_{j+1}+h_j)$ の関数であることを示す。

(1)は定常流の差分近似式とも考えられ，また FA^Th が速度水頭の変化の近似式であるから，水位の変化が，速度水頭の変化，および種々のエネルギー損失からなることを(2)は示している。

一方，連続の関係は，節点における流入量と流出量の和が等しいことであるから

$$A(m,n)Q(n) = Q_e(m) \qquad (3)$$

ここに，A；接続行列，Q；枝の流量，Q_e；水路網外からの流出入流量

エネルギー損失 h_l は，慣用の表わし方にしたがい，つぎのようにあらわす。

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{i) 摩擦損失} & h_l = n^2 l\cdot\dfrac{1}{R_m^{4/3}A_m^2}\cdot Q^2 \\
\text{ii) 曲りによる損失} & h_l = \dfrac{f}{2g}\cdot\dfrac{1}{A_m^2}\cdot Q^2 \\
\text{iii) 急拡による損失} & h_l = \dfrac{f}{2g}\cdot\left(\dfrac{1}{b_{i+1}}-\dfrac{1}{b_{i-1}}\right)^2\cdot\dfrac{1}{h_m^2}\cdot Q^2 \\
\text{iv) 分岐・合流による損失} & h_l = \dfrac{f}{2g}\cdot\dfrac{1}{A_m^2}\cdot Q^2
\end{array}\right\} \qquad (4)$$

損失の大小は別として，分岐・合流部，断面変化部の直下流の枝では，iii)，iv)を，それ以外の枝では，i)，ii)を h_l として考えることにする。

未知量を h_l，h，Q，Q_e とすると，方程式の数の関係から節点数 m だけの条件を与えねば，解は定まらない。条件の与え方として i)節点における水深を与える，ii)流出入流量を与える，iii)節点における水深と流出入流量との関係 $Q_{ej}=g(h_j)$ を与える，iv) i)，ii)，iii)の混合の4通りが考えられる。ii)の場合は，(3)の独立な方程式が $m-1$ となるから，条件を1つ与えなければ解は決定されない。

3. 解析法

1) 水深補正法；水深を一次変数として解析する方法であり，管路網解析の圧力補正法に対応する。[2] その大要は(2)か(4)を用いて，Q について陽にとけることに着目し，まず，水深 h を仮定し，流量 Q を計算する。つぎに，節点における連続関係(3)を用いて，水深の補正量を求め，逐次近似していく方法であり，iv)の場合の解析法を示せば，つぎのようである。$1\sim n_1$ 節点において水深と流出入流量の関係，$n_1+1\sim n_1+n_2$ 節点において流出入流量，$n_1+n_2+1\sim$

m節点$_1$（n_3個）において水深が与えられるものとし，Qe，h，Aをつぎのように分割する。

$$Qe(n)=\begin{bmatrix}Qe_1(n_1)\\ Qe_2(n_2)\\ Qe_3(n_3)\end{bmatrix}\begin{matrix}\cdots\text{未知}\\ \cdots\text{既知}\\ \cdots\text{未知}\end{matrix}\quad(5)\qquad h(n)=\begin{bmatrix}h_1(n_1)\\ h_2(n_2)\\ h_3(n_3)\end{bmatrix}\begin{matrix}\cdots\text{未知}\\ \cdots\text{未知}\\ \cdots\text{既知}\end{matrix}\quad(6)\qquad A(m,n)=\begin{bmatrix}A_1(n_1+n_2,n)\\ A_2(n_3\ \ ,n)\end{bmatrix}\quad(7)$$

未知水深h_1，h_2の仮定値h_1'，h_2'に対する補正量は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix}\Delta h_1(n_1)\\ \Delta h_2(n_2)\end{bmatrix}=\left[A_1(n_1+n_2,n)\cdot\left[K_1'(n,n)A_1^T(e,n_1+n_2)+\frac{1}{2}\left[K_2'(n,n)+K_3'(n,n)\right]\left|A_1^T(e,n_1+n_2)\right|\right]+\begin{bmatrix}G'(n_1,n_1)&0\\0&0\end{bmatrix}\right]^{-1}\cdot\left[\begin{bmatrix}Qe_1'(n_1)\\ Qe_2(n_2)\end{bmatrix}-A_1(n_1+n_2,n)\cdot Q'(n)\right]\quad(8)$$

ここに，K_1'は$\partial he/\partial Q$，K_2'は$\partial he/\partial h_m$，K_3'は$\partial(h_{j+1}-h_j)/gA_{m_i}h_{m_i}/\partial h_{m_i}$を対角成分とする対角行列。

2)流量補正法；流量を一次変数として解析する方法であり，水深，流量を仮定し，(2)を用いて水位差を計算する。つぎに，あるループに沿って水位差を加えると0になることに着目して，順次補正流量を求めていく。流量が求まれば、水位差が計算されるから，新しく得られた水深を用いて繰りかえし演算をすすめる方法である。

ここでは，変数の数をへらすため，システムを"閉じたシステム"として扱うことにする。[3]そのため，グラフGにつぎのような枝（仮の枝）を加える。i)水位既知節点と水位基準節点を結ぶ枝（m_1個）ii)流出入節点（$Qe\neq0$）と基準節点（m_2個）を結ぶ枝。仮の枝においても，水位差hd，流量Qを定義する。hdは基準節点から測った水位，Qは流出入流量Qeに他ならず，i)の仮の枝ではhdが、ii)の仮の枝ではQが既知である。このようにして得られたグラフG_0はm個の節点，n_0（$=n+m_1+m_2$）個の枝からなり，p_1（$=n+m_1+m_2-m+1$）個の独立なループが存在する。

さて，"閉じたシステム"においてはKirchhoffの2法則が成立する。すなわち

$$B_0(p_1,n_0)\cdot hd(n_0)=0\quad(9)$$

$$Q(n_0)=B_0^T(n_0,p_1)\,\mathfrak{J}(p_1)\quad(10)$$

ここに，B_0；原始ループ行列，$\mathfrak{J}$；ループ流量

(9)は水位差をあるループについて加えると0になることを示し，(10)は枝の流量がループ流量の一次結合であることを示している。

Qが既知の枝を木に，hdが既知の枝を補木になるように選び，Q，hd，B_0をつぎのように分割する。

$$Q(n_0)=\begin{bmatrix}Q_{t1}(m_1)\\ Q_{t2}(m-1-m_1)\\ Q_{c1}(m_2)\\ Q_{c2}(p_1-m_2)\end{bmatrix}\begin{matrix}\cdots\text{未知}\\ \cdots\text{未知}\\ \cdots\text{既知}\\ \cdots\text{未知}\end{matrix}\quad(11)\qquad hd(n_0)=\begin{bmatrix}hd_{t1}(m_1)\\ hd_{t2}(m-1-m_1)\\ hd_{c1}(m_2)\\ hd_{c2}(p_1-m_2)\end{bmatrix}\begin{matrix}\cdots\text{既知}\\ \cdots\text{未知}\\ \cdots\text{未知}\\ \cdots\text{未知}\end{matrix}\quad(12)$$

$$B_0(p_1,n_0)=\begin{array}{c}\begin{matrix}m_1 & m-1-m_1 & m_2 & p_1-m_2\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}&E_{13}&0\\ B_{21}&B_{22}&0&E_{14}\end{bmatrix}\begin{matrix}m_2\\ p_1-m_2\end{matrix}\\ \text{木}\qquad\qquad\text{補木}\end{array}\quad(13)$$

(11)〜(13)を，(9)，(10)に代入すれば

$$B_{11}(m_2,m_1)hd_{t1}(m_1)+B_{12}(m_2,m-1-m_1)hd_{t2}(m-1-m_1)+hd_{c1}(m_2)=0\quad(14)$$

$$B_{21}(p_1-m_2,m_1)hd_{t1}(m_1)+B_{22}(p_1-m_2,m-1-m_1)hd_{t2}(m-1-m_1)+hd_{c2}(p_1-m_2)=0\quad(15)$$

$$\begin{bmatrix}Q_{t1}(m_1)\\ Q_{t2}(m-1-m_1)\\ Q_{c1}(m_2)\\ Q_{c2}(p_1-m_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[B_{11}^T\ B_{21}^T]\,\mathfrak{J}\\ [B_{12}^T\ B_{22}^T]\,\mathfrak{J}\\ \mathfrak{J}_1\\ \mathfrak{J}_2\end{bmatrix}\quad(16)$$

(16)から，流量解析は，未知ループ流量$\mathfrak{J}_2(p_1-m_2)$（$=Q_{c2}$）を求めることに帰着し，未知ループ流量$\mathfrak{J}_2$の仮定値$\mathfrak{J}_2'$に対する補正量は、(15)の関係を用いて、次式で与えられる。

$$\left[\Delta\mathfrak{J}_2(p_1-m_2)\right]=\left[\left[B_{22}\ E_{14}\right]\begin{bmatrix}K_{t2}'&0\\0&K_{c2}'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_{22}^T\\ E_{14}\end{bmatrix}\right]^{-1}\left[B_{21}hd_{t1}'+B_{22}hd_{t2}'+hd_{c2}'\right]\quad(17)$$

ここに，K_{t2}'，K_{c2}'は(2)で定義される実の枝のhdについて，$\partial hd/\partial Q$を対角成分とする対角行列

以上、開水路網の定常流の流量解析法について述べたが，詳細は講演時に述べる。

参考文献　1).岩佐・綾"グラフ理論による開水路網不定流の解析法について(第2報)" S.49年年講　2)岩佐・綾・山本"開水路網の解析法について" S.50年関西支部講演会　3)土木学会編"数値解析法講座 流体解析編" pp.119〜127 サイエンス社, 1974年