

神戸大学工学部 正員 神田 徹
大阪府 正員 北田 隆久

まえがき

低平地都市河川は古くから河道改修が加えられ多くの分合流点をもつ河道網を形成しているが、さらに近年流域の内水処理施設の整備にともな、河道流に關しても新たな水理学上の問題が提起されつつある。すなわち、堤内地の雨水が河道に右うたりの地点に集水されポンプ等によ、河道へ排出すること、一方河道貯留を軽減させるために河道水を他河川へ排出する、等である。ここに主流流量とcomparableな流量が点源の形式で横流入する場合や河道の境界で流量を急増あるいは急減する場合の河道不定流の計算法が必要となる。従来の不定流解法は主として自然河川を対象としているためこのような現象に対する詳細な検討はなされていない。本研究でImplicit形式の数値計算法を取り上げたのは、この差分解法は通常の流いでは差分間隔の選択に対する無条件安定性が保証されていること、およびjunctionや境界で解の精度が河道部と不連続に変化しない等の利点をもち、これが上記の問題解決に比較的有望であると考えられるからである。

本研究は以上の観点から上記の流いに対するImplicit法の精度、安定性に関する特性を明らかにし、またjunctionにおける差分計算法を提示したものである。

1. Implicit法による解の特性

基礎方程式は次式である。

$$\partial y/\partial t + \partial Q/\partial x = \delta \tag{1}$$

$$\partial^2 Q/\partial t^2 + \partial^2 Q/\partial x^2 (\theta^2/A) + gA\partial^2 h/\partial x^2 - gA(\zeta_0 - \zeta_f) - \delta \cdot Q/A = 0 \tag{2}$$

上式の計算schemeとしてFig.1のように差分meshを取りA点における $d=d(x,t)$ の微係数等を次のように差分化する。

$$\left. \begin{aligned} \partial^2/\partial x^2 &= \{ \theta(d_{i+1}^{j+1} - d_i^{j+1}) + (1-\theta)(d_{i+1}^j - d_i^j) \} / \Delta x \\ \partial/\partial t &= \{ d_{i+1}^{j+1} + d_i^{j+1} - (d_{i+1}^j + d_i^j) \} / 2\Delta t \\ \bar{d} &= \{ \theta(d_{i+1}^{j+1} + d_i^{j+1}) + (1-\theta)(d_{i+1}^j + d_i^j) \} / 2 \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

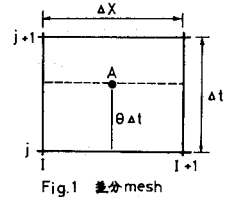


Fig.1 差分mesh

(1). 解の特性を支配するパラメータの提示

(3)式のようなschemeによる解の安定性や精度の特性についてはこれまで θ のみが注目されてきた。しかしながら、基礎方程式の差分式から必ずしも θ のみでなく θ と $\Delta x/\Delta t$ の関係が解の特性を支配すると考えられる。また波動の伝播速度 $c = \sqrt{gH} \pm V$ によ、 $\Delta x/\Delta t$ の選定に制約が存在することは特性曲線法からも類推できる。そこで本研究では解の特性を支配するパラメータとして次のような無次元量、 K を提示する。

$$K = c/c_0 = (\sqrt{gH} \pm V) / (\Delta x/\Delta t) / 2\theta \tag{4}$$

差分解の精度を評価するための指標としては次の量を用いる。

$$\sigma = \sqrt{(X_c - X_r)^2} \tag{5}$$

ここに、 X_c , X_r はそれぞれ計算値、厳密解の値であるが厳密解としてFig.2に示すように実験値に最も適合性のよい差分解を用いる。

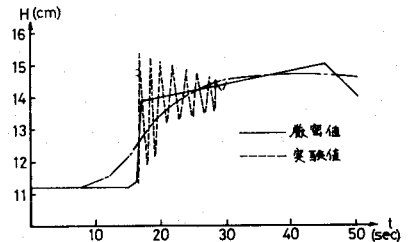


Fig.2 数値値と実験値の比較

(2). 数値計算による検討

幅0.1m, 全長31m, $n=0.01$, 水路床勾配0.001の水路の下流端で流量を $0.54 \text{ m}^3/\text{sec}$ から $0.34 \text{ m}^3/\text{sec}$ に急減させ、この場合の殺波の遡上について数値計算を行な、た。 Δx , Δt , θ , および K の範囲は次の通りである。

$\Delta x = 0.5 \sim 2.0m, \Delta t = 0.1 \sim 120sec, \theta = 0.5 \sim 1.0, K = 0.1 \sim 13$

計算結果によれば解のパターン(水理量(水深)の時間的变化)は $\Delta x, \Delta t, \theta, K$ の組合せによつてFig.3のような4つの型に大別できる。A. 精度、安定性ともに良好。B. 段波の形状が平滑化されてWave Frontの再現は悪いが解の振動は生じない。C. Wave Frontの再現はよいが段波の背面で解が振動する。D. 段波前面で解が振動する。

さて、 K と σ との関係を示せばFig.4のごとくであり、この結果を要約し、上述のパターンと対応させれば次の通りである。

- (i) $k=1.0$ の近傍で θ の値にかかわらず σ は最小値をとる。解のパターンはAである。
- (ii) $k=1.0$ を境にして σ と K, θ の関係が全く異なり、 $k > 1.0$ では K の増加とともに σ も増加するが、 $k < 1.0$ では σ は減少する。また解のパターンは $k > 1.0$ ではパターンA,B,Cが含まれ、 $k < 1.0$ ではパターンDを示す。
- (iii) $k \geq 1.0$ の場合でも $\theta=0.6$ を境にして σ の性状が変化する。すなわち、 $\theta < 0.6$ では K の増加とともに σ は急激に増加するが、 $\theta > 0.6$ では緩やかな増加を示す。また $\theta < 0.6$ ではパターンCを示し、 $\theta > 0.6$ ではパターンBを示す。
- (iv) $\theta=0.6 \sim 1.0$ では $k > 5$ のと σ は一本の曲線にほぼ収束する。すなわち、この範囲では解の精度は K のみに関係する。また解のパターンはBである。

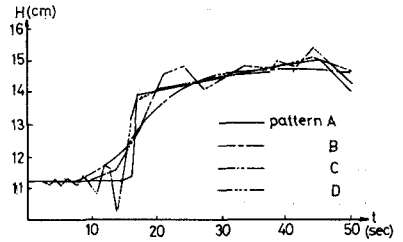


Fig.3 数値解のパターン

以上のように、 K - σ の関係は解のパターンに対応するので K - σ 面では解のパターンはFig.5のように分類できる。また $k=1.0$ における θ と K との関係を示せばFig.6となる。これより $\theta=0.55 \sim 0.6$ では σ は最小となることからわかる。これはFread⁽⁴⁾の結果とほぼ同じである。

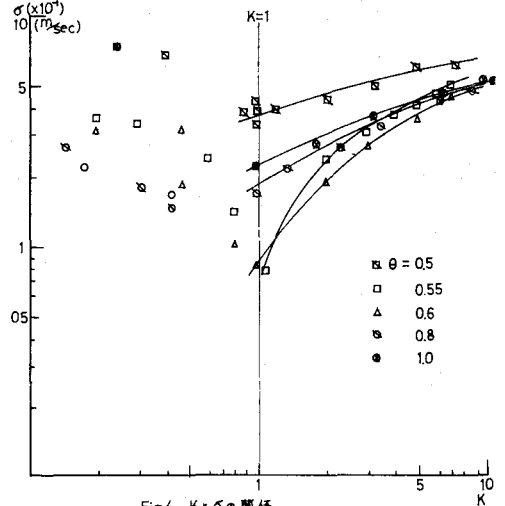


Fig.4 Kとσの関係

2. junctionにおける計算法

横流入の流量が大きく、流入幅が狭い junction では、

河道の流れは2次元 or 3次元的存在であるから、河道不定流の計算法を一次元的に構成する場合には junction 付近での取扱いが問題となる。ここでは junction における水理条件を1次元計算法に組みこむために次のようなモデル化および差分計算法を提案する。

(1). モデル化

合流点下流の計算断面の取り方としてFig.7のように死水域が形成し、水理量が1次元的と見なせる断面を採用する。

(2). 基礎方程式

運動方程式において従来の $H = \text{const}$ の代わりに横流入によるエネルギー流入と合流ともなるエネルギー損失を考慮し、これらのエネルギーの収支の和を $f \cdot v^2/2g$ の形で表わす。

基礎式は次の通りである。

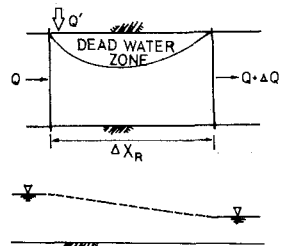


Fig.7 junction model

$$\{A(t+\Delta t) - A(t)\} \Delta x + \Delta Q \Delta t = Q' \Delta t \quad (6)$$

$$\{Q(t+\Delta t) - Q(t)\} \Delta x + \Delta(Q/A) \Delta t + gA(\Delta h + fV/2g) \Delta t + gA_3 \Delta x \Delta t - gV \Delta t \Delta x = 0 \quad (7)$$

ここに、 f : エネルギーの流入と損失による係数

(3) 差分計算法

差分計算法として横流入の形態から次の2つの方法を考える。

A. 点流入に対する差分 mesh

Fig. 8 のように点として流入するものである。これは(6), (7)式で $Q = Q_L$, $\Delta x = 0$ の場合に相当し、次式で表わされる。

$$Q_J = Q_I + Q_L \quad (8)$$

$$(V_I^2/2g + h_I) - (V_J^2/2g + h_J) + fV_I^2/2g = 0 \quad (9)$$

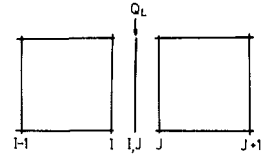


Fig. 8 点流入 mesh

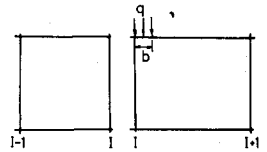


Fig. 9 有限幅流入 mesh

B. 有限幅流入に対する差分 mesh

Fig. 9 のように狭いけれども有限の幅をもつ支川が本川に流入すると考える。これは(6), (7)式で $Q = \delta \cdot b$, $\Delta x = \Delta x$ の場合に相当し、次式で表わされる。

$$\Delta x/2 \cdot \{A_{IH}^{n+1} + A_{IE}^{n+1} - (A_{IH}^n + A_{IE}^n)\} + \Delta t \cdot \{\theta(Q_{IH}^{n+1} - Q_{IE}^{n+1}) + (1-\theta)(Q_{IH}^n - Q_{IE}^n)\} = \delta \cdot b \Delta t \quad (10)$$

$$\Delta x/2 \cdot \{Q_{IH}^{n+1} + Q_{IE}^{n+1} - (Q_{IH}^n + Q_{IE}^n)\} + \Delta t \cdot \left\{ \theta \left[\frac{(Q_{IH}^{n+1})^2}{A_{IH}^{n+1}} - \frac{(Q_{IE}^{n+1})^2}{A_{IE}^{n+1}} \right] + (1-\theta) \left[\frac{(Q_{IH}^n)^2}{A_{IH}^n} - \frac{(Q_{IE}^n)^2}{A_{IE}^n} \right] \right\} + g \Delta t/2 \cdot \{ \theta(A_{IH}^{n+1} + A_{IE}^{n+1}) + (1-\theta)(A_{IH}^n + A_{IE}^n) \} \left[\frac{1}{2} \Delta x \cdot \{ \theta(H_{IH}^{n+1} - H_{IE}^{n+1}) + (1-\theta)(H_{IH}^n - H_{IE}^n) \} - S_0 \right] \Delta x + f \cdot \Delta t \cdot \left\{ \theta(A_{IH}^{n+1} + A_{IE}^{n+1}) + (1-\theta)(A_{IH}^n + A_{IE}^n) \right\} \left[\frac{1}{2} \theta \left(\frac{(Q_{IH}^{n+1})^2}{A_{IH}^{n+1}} \right) - \frac{(Q_{IE}^{n+1})^2}{A_{IE}^{n+1}} \right] + (1-\theta) \left[\frac{(Q_{IH}^n)^2}{A_{IH}^n} - \frac{(Q_{IE}^n)^2}{A_{IE}^n} \right] \right\} = 0 \quad (11)$$

以上の計算法の適用性を検証するために数値計算を行なった。その結果、いずれの方法でも計算は安定であった。

3. 結論

都市河川不定流の数値計算法について、Implicit法による解の特性を5ヶ、junctionでの1次元差分計算法を示した。得られた結果を要約すれば次の通りである。

- (i) 提示したパラメータは解の安定性および精度の両者を規定する。すなわち、 $k > 1.0$ で安定、 $k < 1.0$ では不安定であり、 $k = 1.0$, $\theta = 0.55 \sim 0.6$ で最適解が得られる。また $k > 5$ であるば $\theta = 0.6 \sim 1.0$ の範囲では精度は k のみに関係する。
- (ii) 絞波のような非定常性の強い不定流に対しては、従来からの θ の他に k の値を考慮して差分 mesh を選択すべきである。
- (iii) 横流入のある河道での1次元計算法に対して、運動方程式に合流比ともなるエネルギーの収支を導入した。
- (iv) 点流入および有限幅流入の mesh で Implicit法を用いる差分計算法は都市河川への十分な適用性がある。

謝辞

本研究において適切な御指導をいただいた大阪大学工学部 室田明教授、ならびに神戸大学工学部 寛源亮教授に深謝の意を表す次第である。また本研究は文部省科学研究費、自然科学特別研究(代表者: 京都大学防災研究所 角屋睦教授)の援助をうけた。記して謝意を表すものである。

参考文献

- 1). 神田徹, 北田隆久: Implicit法による不定流の数値計算法について; 関西支部年講, 昭和50年4月
- 2). Cunge, J.A and M. Wogner; Numerical Integration of Barre de Saint-Venant's Flow Equation by Means of an Implicit scheme of Finite Differences; Houille Blanche, 1, 1964
- 3). Quinn, F.H and E.B. Wylie; Transient Analysis of the Detroit River by the Implicit Method; Water Resour. Res., Vol. 8, No. 6, 1972
- 4). Freed, D.L; Technique for the Implicit Dynamic Routing in River with Tributaries; Water Resour. Res., Vol. 8, No. 4, 1973