

神戸大学工学部 正員 ○神田 徹
神戸市 正員 井澤元博

1. まえがき

自然河川の下流部や沖積平野に位置する都市内河川のような低平地緩勾配水路網における流れは、洪水疎通の面から平常時の河水の滞留による水中物質輸送の面から、その挙動の解明が重要である。しかるに、開水路網の流れの解析に関しては近年いくつかのアプローチ¹⁾があるが、従来から改良が加えられている管路網²⁾に比べて相当の問題点が残されている。とくに、分合流点や断面急変部における流れの遷移機構が複雑でその水理特性が不明確であることが、一般性の高い解析モデルの構成を困難にしている。本研究では、分合流点、曲がり部等でのエネルギー授受を管路網のように *minor loss* として処理することは妥当ではなく、これらの遷移部における水理特性を重視すべきであるという基本的な立場から、数値解析モデルを作成する。このモデルに対する基礎方程式のマトリックス・ベクトル表示は一般に煩雑となるので、その系統的な表示手順と一般的解法を提示する。

2. 開水路網システムのモデル化と有向グラフによる表示

開水路網を、分合流点や曲がり等、水量が急変する部分(遷移部)および摩擦損失によって水量が漸変する部分(水路部)の2つのサブシステムからなるシステムとしてモデル化する。このモデルの特徴は遷移部を拠点としていることである。

さて、開水路網システムの一般的形態を考える上で、必要最小限のサブシステム要素を含むものとして、図-1のような開水路網を考える。ここに、遷移部は一つのシステムであるから、さらにその中で水理特性を再現するようなモデルを構成しなければならない。ここでは、いずれの遷移部も中心点およびその上流断面、下流断面で代表される要素から成るものとする。このように開水路網システムは数値計算のために有限個の断面に分割されるが、その断面を有向グラフの節点に対応させ、節点間を有向グラフの枝で結び、さらに流れを枝の向きに対応させると、開水路網システムの幾何学的連結構造は有向グラフによって表現することができる。つまり、図-1の開水路網モデルは図-2のごとく有向グラフ表示できる。ここに、節点定義量として水深を与え、枝定義量として流量を与える。

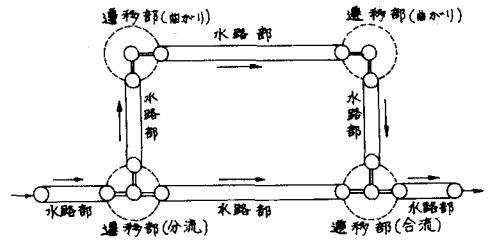


図-1. 開水路網のモデル化

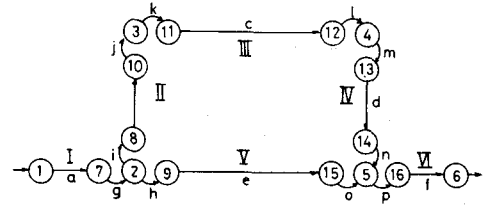


図-2. 開水路網システムの有向グラフ表示

3. 開水路網定常不等流のマトリックス表示

開水路網定常流に対しては次の水理条件が成立する。

i). 各節点において流量の連続式が成立する。すなわち、任意の節点*i*に対して

$$\sum_j q_j = Q_i \quad \text{----- ①}$$

ここに、 Q_i : システム外部からの流入・流出流量で、流入を正とする。 q_j : 枝*j*の流量で、枝の方向と同じ向きの流れのとき正の値とする。 $\sum_j q_j$: 節点*i*で接続する枝についての流量和。

ii). 各枝の損失水頭はその両端の節点における全水頭の差で表わされ、高さの減少する方向は流量の方向に一致する。すなわち、任意の枝*j*に対して

$$\varphi_i - \varphi_{i+1} = H_j \quad \text{----- ②}$$

ここに、 g_i : 節点*i*における全水頭、 $g \equiv \frac{v^2}{2g} + z + h$ 、 H_j : 枝*j*における損失水頭。

iii). 各枝について損失水頭は、流量と水深の関数で表わされる。すなわち、

$$\left. \begin{array}{l} \text{摩擦損失水頭;} \\ \text{分岐、合流、曲がり等による損失水頭;} \end{array} \right\} \begin{array}{l} H = f_c \frac{v^2}{2g} \frac{l}{R} \\ H = f_t \frac{v^2}{2g} \end{array} \quad \text{-----} \textcircled{C}$$

ここに、 l : 水路の長さ。 R : 径深。 f_c, f_t : 損失係数。

ここで、次の仮定を設ける。エネルギー損失としては、摩擦、分岐、合流、曲がりによる損失を考え、これらのエネルギー損失はそれぞれその節点の直下流の枝において起こるものとする。そして、損失水頭をいずれも、 $\Delta h = f \left(\frac{v^2}{2g} \right)$ という形で表現し、 v としては Δh が生じた枝つまり、分岐、合流、曲がりの節点直下流の枝における v を用いる。ここに、 f の値はすべて定数とする。また、節点における流量は、その節点の直上流、直下流の枝における流量の平均値を用いる。ただし、分岐、合流、曲がりの節点における流量は各々のケースに応じて直上流または直下流の枝の流量を用いる。

以上の仮定によれば、図-2の開水路網システムに対する基礎方程式は(i),(ii),(iii)に従って、次のような形式となる。一部の式のみを記せば、

$$(i) \text{ 節点①: } g_a = Q_1, \quad \text{節点②: } -g_g + g_h + g_i = 0, \quad \text{節点③: } -g_g + g_h = 0$$

$$(ii) \text{ 水路部の枝 } b: \left(\frac{(1/2)(g_a^2 + g_g^2)}{2g \cdot b_I^2 \cdot h_g^2} + z_g + h_g \right) - \left(\frac{(1/2)(g_b^2 + g_i^2)}{2g \cdot b_{II}^2 \cdot h_{io}^2} + z_{io} + h_{io} \right) = H_b$$

$$\text{遷移部(分岐): } \left(\frac{(1/2)(g_a^2 + g_g^2)}{2g \cdot b_I^2 \cdot h_g^2} + z_g + h_g \right) - \left(\frac{g_g^2}{2g \cdot b_{II}^2 \cdot h_2^2} + z_2 + h_2 \right) = H_g = 0$$

$$\left(\frac{g_h^2}{2g \cdot b_{II}^2 \cdot h_2^2} + z_2 + h_2 \right) - \left(\frac{(1/2)(g_h^2 + g_i^2)}{2g \cdot b_{II}^2 \cdot h_g^2} + z_g + h_g \right) = H_h$$

$$\left(\frac{g_i^2}{2g \cdot b_{II}^2 \cdot h_2^2} + z_2 + h_2 \right) - \left(\frac{(1/2)(g_i^2 + g_b^2)}{2g \cdot b_{II}^2 \cdot h_g^2} + z_g + h_g \right) = H_i$$

$$(iii) \text{ 水路部の枝 } b: H_b = f_b \cdot \frac{g_b^2}{2g \cdot b_{II}^2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_g \cdot h_g} + \frac{1}{R_{io} \cdot h_{io}} \right) \cdot l_b$$

$$\text{遷移部の枝 } h: H_h = f_h \cdot \frac{g_h^2}{2g \cdot b_{II}^2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_g^2} \right)$$

ここに、 $f_a \sim f_g$: 摩擦損失係数。 $f_g \sim f_p$: 遷移部における損失係数、仮定より $f_g = f_g = f_h = f_h = f_a = 0$ 。

次に、これらの基礎方程式 [(i)では16-1=15個、(ii)では16個、(iii)では16個] を行列表示すれば次式の通りである。ここに、各記号は文末のごとく定義する。

$$(i) \quad A \cdot g = Q \quad \text{-----} (1)$$

$$(ii) \quad \frac{1}{2g} \cdot A^* \cdot M \cdot X_2 \cdot |A| \cdot B \cdot g \cdot g + \frac{1}{2g} \cdot K_1 \cdot X_2 \cdot K_2 \cdot B \cdot g \cdot g + A^* \cdot (Z + h) - \left(\frac{1}{2g} \cdot D_1 \cdot g \cdot g + D_2 \right) = H \quad \text{-----} (2)$$

$$(iii) \quad H = \frac{1}{4g} \cdot B \cdot F \cdot L \cdot |g| \cdot g \cdot \{ |A^*| \cdot R + |A^*| \cdot X_2 + C \} \quad \text{-----} (3)$$

4. 基礎方程式の解法

最下流点における水深は境界条件として与えるとすれば、未知量の数は流量が*e*個、水深が(*n*-1)個、損失水頭が*e*個の計(2*e*+*n*-1)個、一方、式数は(1)が(*n*-1)個、(2)が*e*個、(3)が*e*個の計(2*e*+*n*-1)個なので解は求め得る。ここで、Newtonの逐次近似解法を用いると、基礎式(2),(3)は線形化され、これらの式を連立して解くことにより次式のごとく h, g が求められる。なお、行列記号の右肩のダッシュ記号は近似値を示す。

$$h = \{ A \cdot (P - S)^{-1} \cdot (Q - T) \}^{-1} \cdot \{ Q - A \cdot (P - S)^{-1} \cdot (Q - U) \} \quad \text{-----} (4)$$

$$g = (P - S)^{-1} \cdot \{ (Q - T) \cdot h + (Q - U) \} \quad \text{-----} (5)$$

ここに、

$$P = (A^* \cdot M \cdot X_2' \cdot |A| \cdot B - D_1) \cdot g' + K_1 \cdot X_2' \cdot K_2 \cdot B \cdot g'$$

$$Q = A^* \cdot M \cdot X_3' \cdot |A| \cdot B \cdot g' \cdot g' + K_2 \cdot B \cdot g' \cdot g' \cdot K_1 \cdot X_3' - g \cdot A^*$$

$$\textcircled{1} = -\frac{1}{2} \cdot A^* \cdot M \cdot X_2' \cdot |A| \cdot B \cdot g' \cdot g' - \frac{1}{2} \cdot K_1 \cdot X_2' \cdot K_2 \cdot B \cdot g' \cdot g' - \frac{1}{2} \cdot D_1 \cdot g' \cdot g' + g \cdot D_2 - g \cdot A^* \cdot Z$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot B \cdot F \cdot L \cdot (|A^{*10}| R' + |A^{*11}|) \cdot X_2' + C \cdot |g'|$$

$$T = \frac{1}{4} \cdot B \cdot F \cdot L \cdot |g'| \cdot g' \cdot \{ 2 \cdot (|A^{*10}| R' + |A^{*11}|) \cdot X_3' + |A^{*10}| X_4' \}$$

$$U = -\frac{1}{4} \cdot B \cdot F \cdot L \cdot |g'| \cdot g' \cdot \{ (|A^{*10}| R' + |A^{*11}|) \cdot X_2' + |A^{*10}| X_3' - C \}$$

計算の手順は図-3 のフローチャートに示すごとくである。

5. まとめ

- (1). 開水路網を遷移部と水路部の2つのサブシステムから成るシステムとしてモデル化することにより、遷移部を拠点とするモデルを作成した。
- (2). この開水路網システムに対する基礎方程式と行列表示した。この行列は遷移部のサブマトリックスと水路部のサブマトリックスで構成される。とくに、前者において導入された行列 K_1 および K_2 は遷移部に対する unit として使用すれば有効である。
- (3). 得られた行列表示は開水路網の形状に関して一般性が高い。また、計算機のプログラミングは系統的であり、かつ簡単である。
- (4). Newton 法による逐次近似解法の収束性はきわめて良好で、解の精度も充分である。本研究で提示された計算法はその適用結果から、システムが複雑すなわち比較的大きな行列に対しても有効であると言える。

記号の定義

A : 接続行列、 $(n-1, e)$ 。 $|A|$: A の各成分の絶対値を成分とする行列。 A^* : A の転置行列。 $|A^{*10}|, |A^{*11}|: |A^*|$ において、それぞれ遷移部の枝、遷移部以外の枝に対応する行をすべて0とした行列。 H, g : それぞれ H, g を成分とする列ベクトル、 (e) 。 B, g, F, L : それぞれ $1/2, g, f, l$ (ただし遷移部の枝の長さは1) を成分とする対角行列、 (e, e) 。 Z, Q, h, X_2, X_3 : それぞれ $z, Q, h, 1/2, 1/2$ を成分とする列ベクトル、 $(n-1)$ 。 $h, X_1, X_2, X_3, X_4, R, B_0$: それぞれ $h, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2$ を成分とする対角行列、 $(n-1, n-1)$ 。 M : $(n-1, n-1)$ なる対角行列で、その成分は流入・流出点および分岐、曲がり、合流点に対して1、その他の節点に対して $1/2$ である。 K_1, K_2 : それぞれ $(e, n-1), (e, e)$ なる行列で、遷移部のサブシステムに相当する成分がそれぞれ右のような値をもち、他の成分はすべて0である。 D_1, D_2, C : 最下流点に接続する枝に対応した成分においてのみ、それぞれ $1/2, (z+h), 1/2$ なる値をもち、その他の成分はすべて0である行列、列ベクトル、列ベクトル。次数はそれぞれ、 $(e, e), (e), (e)$ 。ここに、 e : 枝数。 n : 節点数。 $“\begin{smallmatrix} \dots \\ \dots \end{smallmatrix}”$: 列ベクトルの対角行列化を示す記号。なお、行列の次数表示において $n-1$ が用いられている場合、それは最下流点に関する水理量が省かれていることを表わしている。

謝辞

本研究において適切なる御指導をいただいた大阪大学工学部、室田明教授、なうびに神戸大学工学部、篁源亮教授に深謝の意を表わす次第である。また、本研究は文部省科学研究費、自然災害特別研究(代表者: 京大防災研、角屋睦教授)の援助を得た。記して謝意を表するものである。

参考文献 1) 岩佐・綾; グラフ理論による開水路網不定流の解析法について(第2報)、第29回土木学会年次学術講演会講演概要集、49.10。2) 常松; 管路水輸送システムのグラフ理論的解析、土木学会論文報告集、第229号、1974.9。

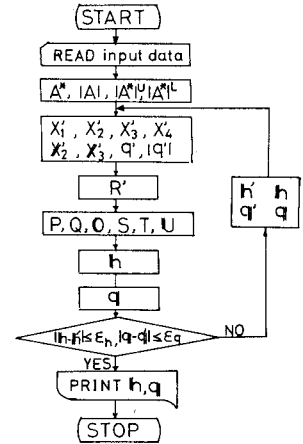


図-3. フローチャート

