II-175 河道ネットワーク構造に関する基礎的研究

京都大学工学部　正員　岩佐 義朗
京都大学大学院　学生員　○小林 信久
〃　〃　棚橋 通雄

(1)はじめに：河川流域の地形学的特性を定量的に表現する場合，現在広く用いられているStrahlerのorderingでは河道ネットワークをSegmentに分割するため，オーダーUの河道とU-1以下の河道の合流にともなう河川形態的，水理・水文的挙動と変化が無視されている。さらに，Strahlerの方法では河道の合流に対して結合則が成立しないため、同じオーダーの河道でもその長さ，面積に非常なばらつきがある。Shreveはこれらの欠点を改良するために，河道ネットワークをリンクに分割し，Strahlerのオーダー1の河道に相当する外部リンクのマグニチュードを1とし，各合流点においてマグニチュードi_1とi_2の2つのリンクが合流してできるリンクのマグニチュードをi_1+i_2とする方法を提案した。本報では，マグニチュードに対する種々の地形則をランダムモデルを用いて理論的に求めるとともに，マグニチュードiとオーダーUの関数関係を明らかにし，マグニチュードiに対する地形則からオーダーUに対する地形則を誘導するものである。

(2)河道リンク数則：トポロジー的にランダムなモデルでは，外部リンク数nの河道ネットワーク，TDCN (topologically distinct channel networks)は同一の確率で生起する。外部リンク数nの場合，TDCNの総数Z_nは${}_{2n-2}C_{n-1}/n$である[1]。このトポロジー的にランダムな母集団におけるマグニチュードi $(1\leqq i\leqq n)$のリンク数の期待値m_i^n,標準偏差σ_i^nはそれぞれつぎのようになる[2]。

$$m_i^n=(n-i+1)Z_iZ_{n-i+1}/Z_n \quad \cdots(1) \qquad (\sigma_i^n)^2=\{2(Z_i)^2Z_{n-2(i-1)}\cdot{}_{n-2(i-1)}C_2/Z_n\}+m_i^n-(m_i^n)^2 \quad \cdots(2)$$

期待値m_i^nに対する分岐比を，$r_i^n\triangleq m_i^n/m_{i+1}^n$と定義すると，(1)より　$r_i^n=(i+1)(2n-2i-1)/(2i-1)(n-i)$　いま，$n,n-i$が十分大きい時は$r_i^n\fallingdotseq 2(i+1)/(2i-1)$と近似され，また$m_i^n$は

$$m_i^n=(r_1^n\cdot r_2^n\cdots r_{i-1}^n)^{-1}m_1^n\fallingdotseq\left(\tfrac{1}{4}\right)^{i-1}\cdot Z_i\cdot n \quad \cdots(3)$$

となる。iのそれぞれの値に対して(3)式の右辺を計算しておけば，任意のnの値に対してm_i^nを求められる。iが十分大きいと，(3)はスターリングの公式$n!\sim\sqrt{2\pi i}\,i^ie^{-i}$を用い，

$$\log(m_i^n/n)\simeq-\tfrac{3}{2}\log i-\tfrac{1}{4} \quad \cdots(4)$$

と近似される。数値計算の結果では，$m_i^n\geqq 1$かつ$i\geqq 3$の範囲では，(1)は(4)で十分近似されることがわかった。(4)式は河道リンク数とマグニチュードiが両対数グラフ上で線形の関係にあることを示すものである。外部リンク数がnである実際の河道ネットワークにおけるマグニチュードiのリンク数をM_i^nで表わせば，チェビシェフの不等式より，$m_i^n-2\sigma_i^n<M_i^n<m_i^n+2\sigma_i^n$の範囲に$M_i^n$が入る確率は$\frac{3}{4}$以上である。新宮川，大井川，揖斐川，安曇川，北山川，十津川の理論値と実測値を比較した結果，両者はよく一致し，ここで用いたランダムモデルの妥当性が確かめられたことになる。つぎに河道の合流に関しては，マグニチュードjと$i-j$のリンクが合流してできるマグニチュードiのリンク数の期待値をm_{ji}^n $(j=1,2,\cdots[i/2])$で表わすと，

$$m_{ji}^n/m_i^n=(2-\delta_{j\,i/2})Z_jZ_{i-j}/Z_i \quad \cdots(5)$$

さらに河道リンクの配分に関してはマグニチュードiのリンクに合流するマグニチュードjのリンク数の期待値を$(m_j^n)_i$ $(i=j+1,j+2,\cdots,n)$で表わすと，

$$(m_j^n)_i/m_j^n=2\cdot Z_{i-j}\cdot{}_{2n-2i}C_{n-i}/{}_{2n-2j}C_{n-j} \quad \cdots(6)$$

(1)，(6)を用いれば有限河道ネットワークに対して，高棹の提案した¼則，½則を，より一般的かつ厳密に証明することができるが，ここでは省略する。

(3)マグニチュードiとオーダーUの関係：外部リンク数nの河道ネットワークにおいて，最大位数kのTDCNの総数を$(Z_n)_k$で表わすと，(i) $k=2$のとき　$(Z_n)_k=2^{n-2}$　$\cdots(7)$　(ii) $k=3,4,\cdots m$ $(m=[\log_2 2n])$のとき　オーダー2の河道数がj $(2^{k-2}\leqq j\leqq[n/2])$であるとすると，この場合に最大位数が$k$となることは，オーダー1の河道数が$j$の場合にその最大位数が$k-1$となることと同じであるから，その場合の数は$(Z_j)_{k-1}$である。そのそれぞれの場合について，$j$個のオーダー2の河道を形成するのに関与しない$n-2j$個のオーダー1の河道がオーダー2の河道によって

形成される$2j-1$個のリンクへの流入する方法は　$2^{n-2j}{}_{2j-1}H_{n-2j}=2^{n-2j}{}_{n-2}C_{n-2j}$　通りある。以上より

$$(Z_n)_k=\sum_{j=2^{k-2}}^{[n/2]}2^{n-2j}{}_{n-2}C_{n-2j}(Z_j)_{k-1}\quad\cdots(8)$$

の繰り返しの関係を得る。(7)を(8)に代入すれば，$(Z_n)_3=\frac{1}{4}\{(2+\sqrt{2})^{n-2}+(2-\sqrt{2})^{n-2}\}-2^{n-3}$　となり，以下$k=4,5,\cdots m$に対して$(Z_n)_k$を求めることができる。

いまマグニチュードiのリンクのオーダーの期待値を$\overline{U_i}$で表わすと，ランダムモデルの仮定より　$\overline{U_i}=\sum_{u=2}^{m}u(Z_i)_u/Z_i$　$m=[\log_2 2i]$　$\cdots(9)$　と表わせる。Shreve はランダムモデルを用い外部リンク数が十分大きい河道ネットワークに対して，オーダーuの河道のマグニチュードの期待値は，$i_u=\frac{1}{3}(2\cdot 4^{u-1}+1)$　となることを示した[3]。前述の流域において各オーダーuの河道のマグニチュードの平均値$\overline{i_u}$を求めて片対数グラフにプロットすれば，　$\overline{i_u}\simeq b^{u-1}$　$\cdots(10)$
（bは定数）の関係があることがわかった。対象としている流域の外部リンク数n，最大位数kのとき，$\overline{i_k}=n$となるようにbを決定すれば，$b=\frac{1}{k-1}\log n$　となり分岐比R_bに等しいことがわかる。よって，　$\overline{i_u}\simeq R_b^{u-1}$　$\cdots(11)$
ただし分岐比R_bの決定方法にはいろいろあるが，前述の流域に対する測定結果によれば，どの方法でもあまり相違がないので簡単のため，$R_b\triangleq\frac{1}{k-1}\log N_1\ (N_1=n)$　と定義しておく。(11)よりマグニチュードiはWoldenbergが対比成長モデル(Allometric growth model) と関連して提案したAbsolute Stream Order になっていることがわかる。またStrahler の方法では，オーダーuは整数値しか取り得えないが，(11)を用いて実数の範囲まで広げると，　$u\triangleq u_s-u_x$　，　$u_x\triangleq\log(i/i_d)/\log(i_u/i_d)$　　u_s；整数　$0\leqq u_x<1$　$\cdots(12)$
ここで，uはいま対象としているリンクのオーダー，u_sはそのリンクを含む河道SegmentのStrahlerのオーダー　i_d，i_uはそれぞれオーダーu_sのSegmentの下流端のリンクのマグニチュード，上流端で流入するオーダーu_s-1の2つの河道Segmentのマグニチュードの平均値である。

(4)河道リンク長・面積則：マグニチュードiのリンクより上流の全リンク長・流域面積の平均値を$\overline{\mathcal{L}_i}$，$\overline{A_i}$で表わすとランダムリンク長モデル[3]より，　$\overline{\mathcal{L}_i}\simeq(l_e+l_i)i-l_i$　$\cdots(13)$　　$\overline{A_i}\simeq(a_e+a_i)i-a_i$　$\cdots(14)$
となる。ここでl_e・l_iは外部リンク・内部リンクの平均長，a_e・a_iはそれぞれ外部リンク・内部リンクへ直接流出する流域の面積の平均的な値である。いま対象としている流域の全リンク長を$\mathcal{L}$，全流域面積をA，$r_l\triangleq l_i/l_e$　$r_a\triangleq a_i/a_e$　で表わすと，$l_e=\mathcal{L}/\{(1+r_l)n-r_l\}\fallingdotseq\mathcal{L}/(1+r_l)n$　，　$a_e=A/\{(1+r_a)n-r_a\}\fallingdotseq A/(1+r_a)n$
さらにマグニチュードiに対する河川密度$D_i\triangleq\overline{\mathcal{L}_i}/\overline{A_i}$はiが十分大きいとき，(13)，(14)より$i$にかかわらず一定となる。$\overline{D_i}\fallingdotseq\mathcal{L}/A\triangleq D$　$\cdots(15)$　　測定結果によれば，(13)，(14)，(15)はかなりの普遍性をもって成立するものと思われる。(13)，(14)をオーダーに対して表現すれば，　$\overline{\mathcal{L}_u}\simeq(l_e+l_i)\overline{i_u}-l_i$　$\cdots(16)$　$\overline{A_u}\simeq(a_e+a_i)\overline{i_u}-a_i$　$\cdots(17)$
(16)，(17)式に(11)を代入すれば，　$\overline{\mathcal{L}_u}\simeq(l_e+l_i)R_b^{u-1}-l_i$　$\cdots(18)$　$\overline{A_u}\simeq(a_e+a_i)R_b^{u-1}-a_i$　$\cdots(19)$
これにより各流域に対してn，k，A，$\mathcal{L}$，r_a，r_lが与えられると，任意のiに対して(13)，(14)より$\overline{\mathcal{L}_i}$，$\overline{A_i}$，また任意のuに対して(18)，(19)より$\overline{\mathcal{L}_u}$，$\overline{A_u}$を求めることができる。(16)，(17)では実測値の$\overline{i_u}$を用いているので，実際の流域の測定結果と非常によく一致する。また(18)，(19)はこれまでに提案されている全河道則，$\overline{\mathcal{L}_u}\simeq l_e R_l^{u-1}$　$\cdots(20)$
流域面積則，$\overline{A_u}\simeq a_e R_a^{u-1}$　$\cdots(21)$　のかわりに用いることができる。(20)，(21)のR_l，R_aをそれぞれ$u=k$のとき，$\overline{\mathcal{L}_k}=\mathcal{L}$，$\overline{A_k}=A$となるように決定すれば，　$R_l=R_b(1+r_l)^{\frac{1}{k-1}}$　$\cdots(22)$　　$R_a=R_b(1+r_a)^{\frac{1}{k-1}}$　$\cdots(23)$
と分岐比R_bを用いて表わせる。(22)，(23)より求めたR_l，R_aは、実測値の回帰分析より求めた値とよく一致する。
(20)，(21)のオーダーuは、これまでは整数値しか取り得えなかったが，(12)で定義されたuを用いると，実数値の範囲にまで拡張されたuに対して(20)，(21)が成立する。ただし，$A_{id}=A_{u_s}$，$A_{iu}=A_{u_s-1}$　である。

(5)結語：河川流域を構成する最小単位をリンクと考え，個々のリンクのランダム性を逆に利用して，全体としての統計的規則性を明らかにし，種々の地形則を提案した。またマグニチュードとStrahler のオーダーとの関係を明らかにし，これまで提案されてきたいろいろのOrdering，さらには流域のマクロ的地形特性を表わすパラメーターの相互関係が明確になった。理論値と実測値との比較・検討の詳細は，講演時に発表する。

文献：(1)水工水理学，丸善，P360～P361　　(2)岩佐，小林，流域の地形学的特性について，関西支部年次講演会　S.50
(3) Advances in Hydroscience，8，1972，P305～P335