

東京工業大学工学部 正会員 吉川秀夫
同 工学部 正会員 福岡捷二
同 大学院 学生員 ○石田 貴

[1] まえがき

固体粒子を浮遊した水流の流速分布が、清水流の場合と比較して変化することは実験的によく知られている。このことは志村氏¹⁾や日野氏²⁾等により、乱れエネルギー平衡方程式において粒子浮遊のためのエネルギー遷散の増加を主要なものとみなして、カルマン定数の変化等を示す式が導かれている。しかしながら実験値との一致をみるためには、粒子浮遊のためのエネルギー遷散項を10倍程度する必要がある。本研究では同様に乱れエネルギーの釣合いという考えから出発し、粒子浮遊流のエネルギー遷散の中で物理的意味が明確な粒子と流体との相対速度差による遷散を主要なものと考え、固体粒子浮遊流を説明する式を導いた。

[2] 乱れのエネルギー平衡方程式

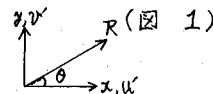
A. 清水流の場合 $\rho \frac{dE}{dt} \div$ 乱れによる拡散項 + 乱れの遷散項 (1)
(平均流からの獲得エネルギー)

B. 固体粒子浮遊流の場合 $\rho \frac{dE}{dt} =$ 固体粒子と流体との相対速度差による遷散項 + $\rho \frac{dE}{dt}$ (2)

[3] 乱流場のモデル化

↓(3)

図1のように乱れを振動流でモデル化すると、R方向の水粒子の速度は、 $U = U_0 \cos \theta + u \sin \omega t$ と表わせる。ωは乱れの角周波数である。乱れの水平及び鉛直速度成分はそれぞれ、 $u = u \sin \omega t \cos \theta$, $v = u \sin \omega t \times \sin \theta$ となり、 $v/u = \tan \theta$ である。一方、 $\tau = -\rho u v$ で表わせるから、最大変動速度は $u = \sqrt{2\tau / \rho} \sqrt{1 - \gamma^2 / \lambda} \div \sqrt{\lambda \tau / \rho}$ となる。又、中川・津津の開水路流の実験³⁾によれば、 $0.455 < \sqrt{\tau} / \sqrt{\rho} < 0.75$ であるからθの範囲は $25^\circ < \theta < 37^\circ$ にあると考えられる。



[4] 運動方程式

Carstens⁴⁾と同様に振動流中の固体粒子の運動方程式を次式で表す。

$$M_0 \frac{d^2 R}{dt^2} = M \dot{U} + R M \frac{d}{dt} (U - \bar{U}) + A (U - \bar{U}) - (M_0 - M) g \sin \theta \quad (4)$$

ここに、 $M_0 = \rho_0 \frac{\pi}{4} d^3$, $M = \rho \frac{\pi}{4} d^3$, $R = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} N_1$, $A = \alpha \mu d (1/\lambda)$, $N_1 = \sqrt{\gamma \mu / \lambda \omega}$, ρ_0 : 流体密度, γ : 固体粒子の比重, d : 固体粒子の粒径
ここで、(3)式を(4)式に代入し、 $\bar{U} - U = Y$ において固体粒子と流体との相対速度差Yについて解くと次式のようになる。

$$Y = \left\{ Y(0) + \frac{M_0 - M}{A} g \sin \theta + \frac{M_0 - M}{A} u \omega \right\} e^{-\frac{A}{M_0 - M} t} - \frac{M_0 - M}{A} u \omega \sin(\omega t + \phi) - \frac{M_0 - M}{A} g \sin \theta \quad (5)$$

右辺第1項は減衰項で長い時間では無視できるが、乱れと固体粒子との間の関係を考えた場合、乱れの消滅・発生や相対運動により常に固体粒子は新しい乱れの影響を受けると考えられるので、乱れの寿命時間程度の時間内においては第1項を考慮する必要がある。又、固体粒子の濃度分布が時間平均的に定常分布をしているとすれば固体粒子の位置は鉛直方向に時間平均的に変化しないものと仮定し、 $R = U \cos \theta$, $T = 0$ より $Y(0)$ を求めると、

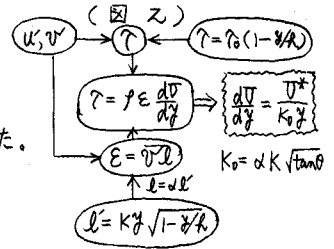
$$Y(0) = \frac{M_0 - M}{M_0 + M} g \sin \theta - \frac{M_0 - M}{A} g \sin \theta - \frac{M_0 - M}{A} u \omega \quad (6)$$

となる。Y(0)は固体粒子と流体との間に最初に存在する相対速度差であり、ωとθとの関数である。

[5] 流速分布

図2の模式図でわかるように、乱れのスケールを $\lambda = K \sqrt{1 - \gamma^2 / \lambda}$ と仮定すれば、流速分布式として対数則が得

られる。これは H. Rouse の格子を振動させて砂粒子を浮遊させた実験⁵⁾で、乱れの強度 ν と質量拡散係数 $\epsilon_s = \beta \nu \lambda$ との間に直線関係があることから、 ν と ϵ とは直接的な関係はなく、 ϵ はむしろ energy dissipation のようなものから決まると考えられるので、 ν とは別個に ϵ への仮定を持ち込んだ結果えられた。



[6] 乱れの角周波数 ω

砂粒子の運動に支配的な影響を与えるような乱れの角周波数 ω の値の範囲を知る必要がある。Rouse の実験によれば、格子の振動周波数を $1 \sim 5 \text{ mm/sec}$ として砂粒子を浮遊させている。これは ω にして $6 \sim 30 \text{ rps/mm}$ である。又、一般に乱れは波数とスペクトルの関係で与えられ、Laufen の pipe flow の実験⁶⁾によれば波数 $k < 0.1$ で大きなエネルギーを所持している。ところで波数 $k = \omega/U$ で与えられるから、 $U = 30 \text{ m/sec}$ として $\omega < 300 \text{ rps/mm}$ である。

[7] 実験結果⁷⁾との比較

相対速度差による単位体積・単位時間当りのエネルギー遷散は $A \bar{v}^2 m / \pi d^3 = B m$ (m ; 砂粒子の体積濃度)と表わせるから、(2)式は次のようになる。 $\epsilon \frac{dU}{dy} = B m + \epsilon \frac{dU}{dy}$ (7)

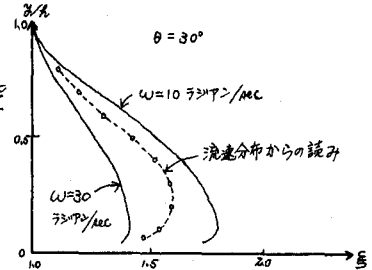
(A) local な速度勾配の変化を表わす式

$\bar{v} \doteq U = U^* (1 - \beta/k)$, $\frac{dU}{dy} = U^*/K_0 y$ を仮定して(7)式に代入すれば水深方向の速度勾配の変化を表わす式として、

$$\epsilon = \frac{d(\frac{U^*}{K_0 y})}{d\bar{v}} / \frac{d(\frac{U^*}{K_0 y})}{dy} = 1 + \frac{B K_0 y m}{\rho U^{*3} (1 - \beta/k)} \quad (8)$$

が得られる。 θ は底付近を除けば水深方向の変化があまりないので、一定の $\theta = 30^\circ$ として、 ω の範囲で示すと図3のようになる。

(図 3) Vanoni and Nomikos の実験
流量一定 Run 5 (浮遊流), Run 6 (潜水流)
 $\bar{m} = 2.61 \times 10^{-3}$ $d = 0.1 \text{ mm}$



(B) カルマン定数の変化を表わす式

(A)と同様な仮定と $\frac{dU}{dy} = U^*/K_0 y$ として(7)式に代入し、水深方向に積分すればカルマン定数の変化を示す式が得られる。

$$\gamma = \frac{K_0}{K_0} = 1 + \frac{B K_0 y m}{\rho U^{*3} (\log e k/a - 1)} \quad (\bar{m}; \text{平均濃度})$$

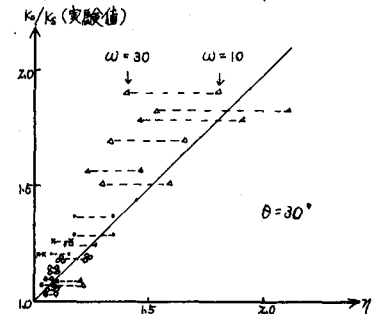
(A)と同様に $\theta = 30^\circ$ として、 ω の値により動く範囲を図4に示す。

ここで

$$B = \frac{\rho (\gamma + k) \omega}{4\pi} \left\{ Y(0)^2 + 2(\alpha - \beta) Y(0) \right\} + \frac{\rho (\gamma - 1) \omega U^2}{2A} \frac{\pi}{6} d^3 + \frac{\rho (\gamma - 1) \omega \sin \theta}{A} \frac{\pi}{6} d^3$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{M_0 - M}{A} g \sin \theta \\ \beta = \frac{M_0 - M}{M_0 + kM} U \omega \end{cases}$$

(図 4) Vanoni and Nomikos
 $\circ d = 0.16 \text{ mm}$
 $\times d = 0.10 \text{ mm}$
 $\bullet d = 0.16 \text{ mm}$
 $\Delta d = 0.10 \text{ mm}$



[8] あとがき

砂粒子浮遊流の場合には上述の考え方でほぼ説明したと思うが、濃度の高い場合や、中立粒子浮遊流の場合等においては、更に運動方程式に外力として衝突による項を加えて計算する必要があるし、(2)式の右辺第2項の置き方も考える必要がある。又、 ω についてはスペクトル分布を与えて計算してやれば、乱れの分布の影響を計算に入れることが可能となるであろう。

[参考文献] 1) 志村博康 土木学会論文集 (昭32.6) 2) 日野幹雄 土木学会論文集 (昭35.4) 3) 中川祐洋 土木学会論文集 (昭49.11) 4) Carstens Trans. A.S.C.E. (1952.10) 5) H. Rouse Proc. 5th Int. Cong. of Applied Mec. (1938) 6) Hinge "Turbulence" 7) Vanoni and Nomikos Trans. A.S.C.E. (1961) 8) Vanoni Trans. A.S.C.E. (1946)