

東京工業大学工学部 正員 日野幹雄
同 大学院 学生員 〇宮永洋一

1. 概 要

河床波の発生は、流れに対する移動床面の不安定性によると考えられるが、この論文ではあいまいな仮定や、制約の多い実験式に頼ることを避け、むしろ現象の本質を見落さぬことに留意した。

従って、乱流混合係数という不確かさを避けるため、解析の対象も層流として発生機構を調べた。更に流体場のエネルギー散逸率の"停留条件"から、発生初期の河床波形状の非対称性につき、理論的検討を加えた。

2. 波型底面上の粘性流の実験的検討

波型固定床上的の粘性流については、Benjamin¹⁾により摂動解が得られている。その妥当性をチェックするため、図1に示すような水槽に、グリセリンと水の混合液を流して、水素気泡法により流速分布を測定した。

結果の一例を図2に示す。実線が実験値、破線がBenjaminの解であるが、この理論値は、摂動をうけない平行流の速度分布を、 $U(y) = U_m \sin Ky$ ($K = \pi/\delta$, δ は境界層厚)で近似したものである。Uの値も一点鎖線で図中に入力した。底面付近で摂動をうける解とUとの差が著しいのは、波型と流れとの相互作用に起因するものであるが、Benjaminはこの領域を"wall layer"と呼び、この層の代表的な長さは、

$$1/m = (R U(0))^{-1/3} \quad (1)$$

で与えられる。ここに R は波型の波数、 $R = U_m \delta / \nu$ である。

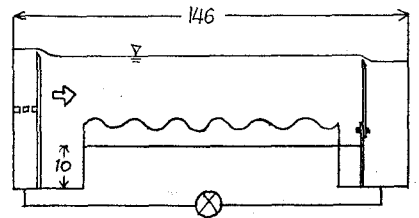
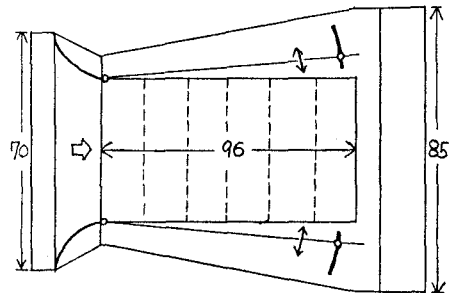


図 — 1

3. 河床波の発生

Benjaminの解は、半無限の流体場に対するものだから、河床波の形状、波高など、幾何学的な性質を議論するためには、これを有限水深の場合の解に修正する必要がある。また固定床の場合の解を、移動床上的の流れに持込んでよいかという問題もある。

前者については、少なくとも発生機構を議論する段階では問題ない。

後者については、日野²⁾が"hip current"の発生理論で提案した"応答の遅延の概念"により、流れをquasi-steady、河床をunsteadyとして解析することができ。

実験条件

水深 H (cm)	10.6
波型振幅 A (cm)	1.0
波型波長 L (cm)	16.0
動粘性係数 ν (cm ² /sec)	0.85
1/11LZ 数 $\frac{U_m \delta}{\nu}$	29.0
河床断面位置 $\frac{x}{L}$	0.25

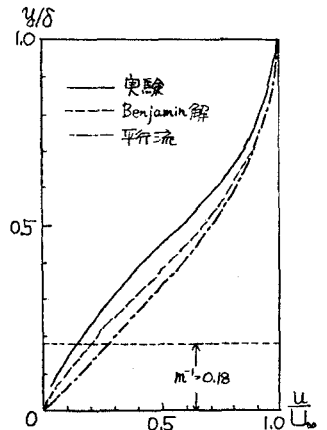


図 — 2

2) に示した近似もとづき、 $k/K \ll 1$ のときの底面セン断応力は次式であらわれる。

$$\tau_s = R^{-1}U(0) + 1.372 \rho_s m^{-1} a \exp[\lambda(\xi_s + \pi/3)] \quad (2)$$

いま、流砂量 q_s がセン断応力のべき乗に比例するとして、 $q_s \propto \tau_s^n$ とおけば、(2)式の第2項が、第1項に比べて十分小さいから、 $O(a^2)$ を無視すると、 $\partial q_s / \partial \xi \approx \lambda n C \rho_s m^{-1} a \exp[\lambda(\xi_s + \pi/3)]$ (C は正の定数)とおくこととができ、これを流砂の連続式

$$\partial R / \partial t + \partial q_s / \partial \xi = 0 \quad (R = a \exp(\lambda k \xi)) \quad (3)$$

に代入し、 $\partial a / \partial t = p a$ といふ amplitude factor (p の実部) を求めると、

$$R_0[p] = \sqrt{3} n C \rho_s^{3/2} m \quad (4)$$

となり、セン断応力が強い程流砂量も多いはずだから $n > 0$ で、結局(4)式よりあらゆる波長に対し河床波が成長することを示している。その成長速度は、波長が短く、wall layer が厚い程速いが、他方、(2)で与えられるセン断応力は、波長が境界層厚さに比べて十分長い場合にのみ正しいという制約があるから、(4)を最大にするような波長(卓越波長)が存在すると思われる。

4. 河床波形状の非対称性について

河床波は、その発生初期において、すでに非対称形をもつことが観測されている。一方表面波(風波)は正弦波形をもつて発達することが知られている。この両者の差異は、界面における支配的な力の違いが原因である。すなわち、流体と砂床の間では粘性が、水と空気では圧力(重力)が主要な役割を担っていると思われる。そこで河床波の形状における粘性の効果を見るため、Benjamin 解の重ね合わせによつて、エネルギー散率を極値ならしめる河床波の形状 $y = R_0 \left[\sum_{j=1}^N A_j \exp(i k_j x) \right]$ を求めた。

デカルト座標 (x, y) に対し、次のような等角写像によつて直交曲線座標 (ξ, η) を定義する。

$$w = z - \sum_{j=1}^N i A_j \exp(i k_j z) \quad (w \equiv \xi + i \eta, z \equiv x + i y) \quad (5)$$

そして流函数を、

$$\Psi = \int_0^\eta U(\eta_2) d\eta_2 + \sum_{j=1}^N A_j \{ F_j(\eta) + U(\eta) \exp(-k_j \eta) \} \exp(i k_j \xi) \quad (6)$$

とおき、河床波一波長あたりの全エネルギー散率を次式により計算する。

$$\dot{W} = -(M/2) \int_0^{2\pi/\kappa_0} \int_0^\eta [2(R_0 \sqrt{U_1})^2 + 2(R_0 \sqrt{U_2})^2 + (R_0 \sqrt{U_1 + U_2})^2] d\xi d\eta \quad (7)$$

ここに、 J は(5)のヤコビアンで、次のようにあらわされる。

$$J = 1 + 2 \sum_{j=1}^N k_j A_j \exp\{i k_j (\xi + i \eta)\} \quad (8)$$

河床波の最大振幅 A_0 、Crest の位置 ξ_0 とすると、

$$A_0 = \sum_{j=1}^N A_j \cos k_j \xi_0 \quad (9)$$

(9)の条件下で、(7)を極値ならしめる内部となるから、 A_j を N 個として、 $\mathcal{L} \equiv \dot{W} + \lambda \left(\sum_{j=1}^N A_j \cos k_j \xi_0 - A_0 \right)$ とおき、

$$\partial \mathcal{L} / \partial A_\ell = 0 \quad (\ell = 1, 2, \dots, N), \quad \partial \mathcal{L} / \partial \lambda = 0 \quad (10)$$

より $A_1, A_2, \dots, A_N, \lambda$ についての連立一次方程式を得る。これは、

$$\sum_{j=1}^N \{ F_j + F_j + (U + U') \exp(-k_j \eta) \} F_j + (U + U') \exp(-k_j \eta) + (R_0 \sqrt{U_1 + U_2})^2 + (R_0 \sqrt{U_1 + U_2})^2 \} A_j + \lambda (A_j \cos k_j \xi_0 - A_0) = 0 \quad (11)$$

および(9)式である。これを解いて、粘性が支配的な界面に卓越する河床波の幾何学的特徴を知ることが出来る。計算結果については別の機会に譲り、本論文では基本的な考え方と計算方法を紹介するに止める。

<参考文献>

- 1) Benjamin, T.B. (1959): Shearing flow over a wavy boundary, J.F.M., Vol.6, pp.161-205
- 2) 日野 幹雄 (1973): 海浜流系および海浜直形形成に関する流体力学的不安定理論Ⅲ—応答遅延性に基づく理論, 東工大土木工学科研究報告 No.14, 6月, pp.43-54