

1. はじめに 河床が土砂のような洗掘あるいは堆積が可能な材料で構成されている河川における、弯曲部の横断形状は近似的に放物線の形を成すものと考えても差しつかえない。

この放物線の形を数式的に決定するために、水流のポテンシャルと横断形状との間に変分法の考え方を適用して、斜面上の土砂粒子に働くいろいろな力とその方向とを考えてそれらから横断形状を現わす式を導く。そしてその式によって実験水路の規模の横断形状の計算例を示す。

2. 変分法の適用について 変分法を適用するとき次のように考える。汎関数 $I(y)$ が

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \quad \text{①}$$

と表わされるとき、変関数 y の比較関数 $\bar{y} = y + \delta y$ を図-1 に示すように考えてその汎関数 $I(y + \delta y)$ と $I(y)$ との差をとって

$$I(y + \delta y) - I(y) = \delta I + \delta^2 I \quad \text{②}$$

のように第一変分 δI と第二変分 $\delta^2 I$ との和とする。

汎関数 $I(y)$ が極小値をもつならば、 $\delta I = 0$ 、 $\delta^2 I \geq 0$ となっており、 $\delta I = 0$ にするには

$$\delta I = \left[F_y \delta y \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \frac{d}{dx} (F_{y'}) - F_y \right\} \delta y dx \quad \text{③}$$

において、

$$\frac{d}{dx} (F_{y'}) - F_y = 0 \quad \text{④}$$

とすればよい。なぜならば式③の右辺第1項は図-1 から明らかなように境界 $x = x_0$ 、 $x = x_1$ において $\delta y = 0$ であるから第1項は零となる。

あるいはまた直接に

$$\delta y = 0 \quad \text{⑤}$$

としてもよいということが式③からもわかる。

ここで式①における汎関数としてたとえば太陽光線が太陽を出て地球に達する迄の時間を考えると、式④あるいは式⑤を積分して x の関数 y を求めれば、それが太陽光線が地球まで到達するその経路を示していることになる。そのとき光線の到達時間は極小値をとるようになっている。

この報告において汎関数 $I(y)$ としては水流のポテンシャルを想定し、これを極小にする条件としては $\delta y = 0$ に相当するものと考え、それを解いて、横断形を示す基礎式であるとしている。

ここで y の関数形としては一般的に w_n を x の関数、 A_n をある定数として

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} A_n w_n \quad \text{⑥}$$

とおくことができる。あるいは近似的につぎのように考える。

$$y_n = \sum_{n=1}^n A_n w_n \quad \text{⑦}$$

これから形式的に

$$\delta y_n = \sum_{n=1}^n A_n \delta w_n \quad \text{⑧}$$

として、条件を満たす A_n を与えて式⑧を解く。

3. 横断形状の基礎式 水路の横断面に関して図-2 のように水面に x 軸をとり、内岸側の側壁に沿って x 軸に垂直に下方へ y 軸をとる。水路幅は B とし、最深部の x 座標、 y 座標はそれぞれ x_m 、 h_m とする。

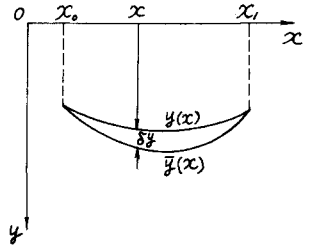


図-1 比較関数

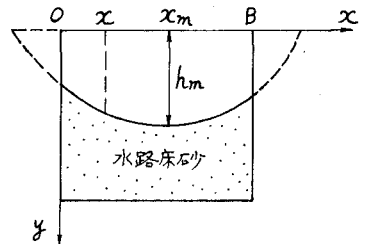


図-2 水路床の座標系

そこで、前項の式⑧における係数 Q_R についてはつぎのように考える。水路床の土砂粒子は水流のポテンシャルに依存し、それが極小になるように粒子は移動しそして落着くであろうとする。そのとき図-1の δy は $\delta y=0$ になっている。したがって、粒子はまさに動こうとする限界状態で釣り合っており、そのとき粒子に働いている力は重力 G 、流体力 R 、摩擦力 F である。それらの力は土砂の粒径を d とし、その形を球形とすると

$$G = \frac{\pi}{6}(\sigma - \rho)gd^3 \quad (9)$$

$$R = C_D \pi d^2 \rho g \frac{K_t + f}{K_c + K_n + f} \frac{\sigma - \rho}{\rho} d \quad (10)$$

$$F = K_f d^3 (\sigma - \rho) g f \quad (11)$$

と表わされる。ここに σ :土砂の密度、 ρ :水の密度、 C_D =抗力係数、 g :重力加速度、 K_t :摩擦力に関するある係数、 K_c :流体力に関するある係数、 K_n :揚力に関するある係数、 f :摩擦係数である。

釣り合い状態にあるこれらの力の横断、縦断のそれぞれ斜面方向への分力を Q_R とする。

また式⑧における δW_R については図-3を参照して、横断斜面方向を S 軸、縦断斜面方向を l 軸として、 Q_R の作用する方向に一致させて微小距離 δS 、 δl とする。

したがって座標軸の取り方に注意して符号を考え、式⑧を展開した形で表わして零と置くとつぎようになる。

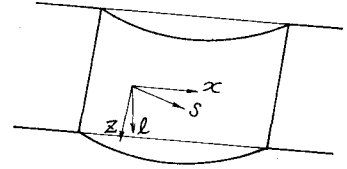


図-3 座標系

$$-\frac{1}{6} \frac{dy}{dx} \frac{1}{\frac{dy}{dx}} + \frac{1}{6} I \frac{1}{I} - 10 A C_D \frac{y}{x + r_i} \frac{1}{\frac{dy}{dx}} + A C_D \frac{1}{I} + f \frac{1}{6} \frac{1}{\frac{dy}{dx}} - f \frac{1}{6} \frac{1}{I} = 0 \quad (12)$$

ここに I :水路床の縦断勾配 $=dy/dx$ 、 $A = K_t + f / K_c + K_n + f$ 、 r_i :弯曲水路の内岸側の曲率半径である。

式⑫を整頓し、 $x = x_m$ 、 $y = h_m$ において $dy/dx = 0$ の境界条件のもとに積分すると

$$y = \left\{ h_m + \frac{g}{a-b} (x_m + r_i) \right\} \left(\frac{x + r_i}{x_m + r_i} \right)^{\frac{b}{a}} - \frac{g}{a-b} (x + r_i) \quad (13)$$

となる。ここに $a = A C_D \frac{1}{I} - \frac{f}{6I}$ 、 $b = 10 A C_D$ 、 $g = \frac{f}{6}$ である。

ただし横断方向、縦断方向の水路床の勾配は双方とも相当小さいと仮定している。

4 まとめ 前項までのような考え方のもとに得られた式⑬について、実験水路程度の規模の横断面形を具体的に計算してみると図-4に示すようになった。計算に使用した諸量は、水路幅は50cm、水深は最深部において10cm ($h_m = 10.0$)、その位置は内岸側から35cm ($x_m = 35.0$)、水路床砂の粒径は $d_{50} = 0.23$ mm、その内部摩擦角は37度、水路床の縦断勾配は $I = 0.0095$ 、弯曲水路の内岸側の曲率半径は $r_i = 75$ cm、抗力係数は $C_D = 0.13$ 等である。

水路床が洗掘されることもなくまた堆積するようなこともなく平衡を保っている、安定した定常的な場合においては、図-4に示すようになだらかな横断水路床形になるであろうということは予測されるところである。

実験から得られる結果での検証、あるいは局所的な深掘れ、堆積が生ずるような場合についての横断面形などは今後に残された課題である。

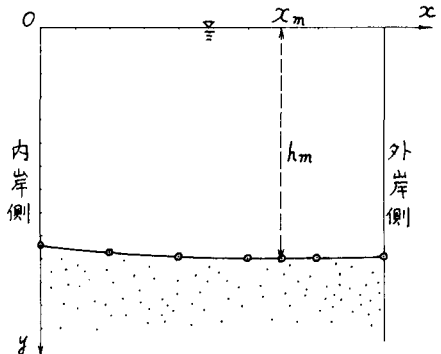


図-4 計算による横断面面形の1例

図めに、図-4の計算値

表-1 横断面面形の計算値 (cm)

を x の5cmききみで示すと表-1のようである。

x	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
y	9.40	9.57	9.70	9.81	9.89	9.95	9.98	10.00	9.98	9.95	9.90