II-113　確率在庫モデルによる渇水時貯水池操作の一考察

名古屋工業大学大学院　学生員　○山根隆行
名古屋工業大学　正　員　長尾正志

1．まえがき　貯水池による水供給の問題は、確率的に変動する流入量を入力とし、現在の貯水量状態を勘案しながら、需要水量をなるべく満足するような操作をおこなう系とみなすことができる。流入量時系列をランダム化すれば、ランダム確率変量を入力とする在庫問題として考察できる。入力を以上のように処理することにより、初期貯水量状態を除いて、操作開始以後の貯水量状態は確率変量として表現でき、需要取水量の確保は、その信頼性として確率評価しうる点に着目し、操作基準量に確率量を用いる手法を提案する。とくに渇水期の操作を対象に考察を進めるが、ここでは、給水制限を開始する初期貯水量状態および以後の渇水状態の確率情報が、その後の操作における主要な操作要因となる。

2．貯水量の確率的変化　操作の時間的推移を考慮してつぎの仮定をおく。

(1)　基礎の仮定　i)要補給期間の分割：$S\ell(\ell=\mathrm{I},\mathrm{II})$ の2期とし、各期を6個の単位期間($n=0\sim5$)に分割。ii)操作回数：要補給期間終了までに実行した操作回数$N(N=1\sim12)$。iii)流入量分布：各$S\ell$期の期間$(n,n+1)$での総流入量$X_{S\ell,n}$をランダム変量とし、$P\{X_{S\ell,n}=j\}=G_j\ (j=0,1,\cdots)$の分布型を仮定。iv)貯水量：$Z_{S\ell,n}$は$X_{S\ell,n}$が流入する直前の貯水量。貯水量状態は、$P\{Z_{S\ell,n}=k\}=W_k\ (k=0\sim t)$の分布。$k=0$は空水位、$t$は貯水量上限値。$k$の単位は$j$の単位に対応。v)放流量：単位期間放流量で表わす。貯水量k単位分の放流量は、$M=k$。mは目標放流量を示す。

(2)　貯水量の推移確率　貯水量分布の過渡的変化は、$S\ell$期$n+1$時点ではつぎのようになる。以後$S\ell$は省略する。

$$Z_{n+1}=\min\{[t]\,;[(Z_n+X_n)-\min(m\,;Z_n+X_n)]\}\qquad(n=0,1,2,3,4,5)\qquad\cdots\text{-}(1)$$

ここでは、$Z_{S\ell,6}=Z_{S(\ell+1),0}$としておく。上式より、貯水量系列は単純マルコフ連鎖を構成する。したがって推移は離散的確率変量として推移確率行列の演算を用いて表現可能である。以下では、n期から$n+1$期への推移が、流入量分布が所与という条件により目標放流量mに依存する推移確率行列$\mathbb{P}_m$と、貯水量状態の確率行ベクトルを使って表現される。　$(W0,W1,\cdots,Wt)^n\cdot\mathbb{P}_m=(W0,W1,\cdots,Wt)^{n+1}$　（$\mathbb{P}_m$：$t\times t$の正方行列。G_jの関数でjはmの関数）$\cdots$(2)

上式の$n+1$期に相当する行ベクトルの各成分は、具体的には右に示す(3)式のようである。

$$\left\{\begin{aligned}(W0)^{n+1}&=(W0)^n\Big(\sum_{j=0}^{m}G_j\Big)+(W1)^n\Big(\sum_{j=0}^{-1+m}G_j\Big)+\cdots\cdots+(Wt)^n\Big(\sum_{j=0}^{-t+m}G_j\Big)\\&\ \ \vdots\\(Wk)^{n+1}&=(W0)^n\{G(m+k)\}+(W1)^n\{G(m+k-1)\}+\cdots+(Wt)^n\{G(m+k-t)\}\qquad\cdots(3)\\&\ \ \vdots\\(Wt)^{n+1}&=(W0)^n\Big(\sum_{j=m+t}^{\infty}G_j\Big)+(W1)^n\Big(\sum_{j=m+t-1}^{\infty}G_j\Big)+\cdots+(Wt)^n\Big(\sum_{j=m}^{\infty}G_j\Big)\end{aligned}\right.$$

3．信頼性確率と期待放流量　(1)式中の放流を表わす項を　$R=\min(m;Z_n+X_n)$　と記す。これより、n期で目標放流量mを満足しえない事態、すなわち、事象$\{R<m\}$の確率を、渇水確率V^nとして定義する。　$V^n=P\{R<m\}=P\{R\leq m\}-P\{R=m\}$　$\cdots\text{-}(4)$

(4)式の第1項は、1ステップ経過後に$W0$となる確率を示し、第2項は、流入量と貯水量が補充しあい、ちょうどmを満足する確率を示すもので(4)式はつぎのように書き直せる。　$V^n=(W0)^{n+1}-\sum_{k=0}^{m}(Wk)^n\{G(m-k)\}$　$\cdots\text{-}(5)$

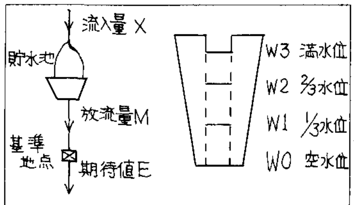
渇水の排反事象の確率$(1-V^n)$を考えると、これはmを確保できる信頼性確率を表わす。またこの場合に対する放流量の期待値E_nは次式で計算できる。　$E_n=m\cdot(1-V^n)$　$\cdots\text{-}(6)$

4．確率量を操作基準にもつ手法とその評価　信頼性確率は渇水確率で決定されるから、信頼性については、渇水確率で議論しておく。(5)式は、mが定まるとV^nが決まる式であるが、$(W0)^{n+1}$に(3)式の第1行を、第2項には、つぎに示す展開式：$\sum_{k=0}^{m}(Wk)^n\{G(m-k)\}=(W0)^n(Gm)+(W1)^n\{G(m-1)\}+\cdots+(Wt)^n\{G(m-t)\}$　を用いると、(7)式のように変形できる。　$V^n=(W0)^n\Big(\sum_{j=0}^{m-1}G_j\Big)+(W1)^n\Big(\sum_{j=0}^{m-2}G_j\Big)+\cdots+(Wt)^n\Big(\sum_{j=0}^{m-t-1}G_j\Big)$　$\cdots\text{-}(7)$　この式は、$Z_n=(W0,W1,\cdots,Wt)^n$が既知の際、V^nを基準にして(ΣG_j)を決定し得ることを示す。(2)式から理解されるように(ΣG_j)はmのみに依存した量であり各期の貯水量状態は、1ステップ前の状態から決定してくるから、$(1-V^n)$を基準量として、実行放流量Mの時系列を決定することが可能となる。さらに、MがV^nの関数とみなされることより、ある一定の基準渇水確率V_0以下で

Mを選定してゆき、操作期間を通じてEが最大値、E_{max}となるような$\bar{V}_0$を$\hat{\bar{V}}_0$として評価することが可能である。すなわち、定式的には次式で表記される操作が考えられる。 $E_{max} = \max_{\bar{V}=\hat{\bar{V}}_0}\left[E\{M(\bar{V})\cdot(1-\bar{V})\}\right]$ ただし $\bar{V} \leq \bar{V}_0$ ……(8) ここに、確率量$(1-\hat{\bar{V}}_0)$ を基準量にもつ操作手法(A)が、渇水操作の開始時点での既知貯水量Z_0を初期条件にもち、操作期間を通した期待放流量を最大にする放流量時系列の選定として提案されたことになる。

5. 他の手法との比較 まず1例として、操作基準量に目標放流量m_0をとり、操作期間を通してEをE_{max}としうるm_0を$\hat{m}_0$として評価する手法(B)を考える。すなわち、定式的には次式で表現される操作である。
$E_{max} = \max_{m_0=\hat{m}_0}\left[E\{m_0\cdot(1-\bar{V}(m_0))\}\right]$ ただし m_0は一定。…(9) もう1例として、基準地点で常にある一定の期待値(E_0)以上の放流量があるように貯水池操作をする手法(C)を考える。(5)(6)式より、この手法はつぎのように表現される。 $E_0 \leq E\{m(1-\bar{V}(m))\}_{\hat{m}=\min m}$ ……(10) ここで、$\hat{m}=\min m$ は、Eが所与のE_0を越える条件を満す最小目標放流量の選定を意味する。

6. 単純モデル流域における理論の検討 図示のような流域と貯水池を設定し、上記の(A)(B)(C)の3つの手法を、初期条件$(W0,W1,W2,W3)^0=(0,0,0,1)\sim(1,0,0,0)$の4通りについて比較検討した。下の表は結果の1例である。計算はまず、



モデル流域と貯水池概念図

手法(A)と(B)の平均放流量期待値による比較結果　　＊印は有効手法とその基準値を示す

操作回数 (N)		12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
操作開始時点		SI 0	SI 1	SI 2	SI 3	SI 4	SI 5	SII 0	SII 1	SII 2	SII 3	SII 4	SII 5
規定渇水確率	0.1	1.12	1.14	1.15	1.18	1.20	1.12	1.14	1.17	1.22	1.31	1.48	2.00
(V_0)	0.2	1.23	1.20	1.22	1.25	1.20	1.24	1.29	1.22	1.28	1.40	1.64	*2.40
	0.3	*1.26	1.24	*1.27	*1.26	*1.30	1.28	1.34	1.32	1.43	1.40	1.64	*2.40
◎ 手法 (A)	0.4	1.22	*1.25	1.26	1.24	1.29	1.28	1.35	1.38	1.38	1.55	1.64	*2.40
	0.5	1.16	1.19	1.21	1.22	1.21	1.26	1.30	1.34	1.36	1.53	1.78	*2.40
	0.6~0.8	0.98	0.99	0.99	1.00	1.00	1.01	1.03	1.05	1.08	1.13	1.24	1.60
	0.9	0.32	0.32	0.32	0.32	0.33	0.33	0.33	0.34	0.35	0.37	0.40	0.50
規定目標放流量	1	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00
(m_0)	2	1.16	1.17	1.20	1.23	1.26	*1.30	*1.36	*1.43	*1.52	*1.64	*1.80	2.00
◎ 手法 (B)	3	0.52	0.54	0.57	0.60	0.63	0.68	0.74	0.83	0.97	1.19	1.59	*2.40
	4	0.14	0.15	0.16	0.18	0.21	0.23	0.27	0.33	0.41	0.55	0.82	1.60
	5	0.04	0.05	0.05	0.06	0.06	0.07	0.08	0.10	0.13	0.17	0.25	0.50
操作回数 (N)	1	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	3
	2	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	
	3	1	2	1	1	1	2	2	2	2	2		
◎ 有効手法による実行放流量の時系列 (M)	4	2	1	2	2	2	2	2	2	2			
	5	1	2	1	1	1	2	2	2				
	6	2	2	2	2	2	2	2					
	7	1	1	1	1	1	2						
	8	2	2	2	2	2							
	9	1	1	1	1								
	10	2	2	2									
	11	1	2										
	12	2											

○初期貯水量状態
(W0, W1, W2, W3) = (0, 0, 1, 0)
○流入量分布の確率密度
(G0, G1, G2, G3)
= (0.2, 0.4, 0.3, 0.1)

手法(A)と(B)についてそれぞれの基準量で要補給期終了まで操作したとき期待される1ステップ毎の平均放流量期待値で比較し、有効手法の基準値を求める。つぎに選んだ最大の平均放流量期待値を(E_0)として式(10)に適用し、手法(C)と比較する。その結果、操作開始時点での貯水量状態が満水位に近く、操作期間が短いほど手法(B)が有効となる。反対に、空水位に近く、期間が長くなるほど手法(A)が有効となる。手法(C)との比較では、途中で条件を満足できる放流量の選択が不可能となり、手法(A)や(B)に比べ有効性が低いことがわかった。さらに手法(A)による平均放流量期待値は、操作期間が長くなると、初期貯水量状態にも、規定渇水確率にもよらず一定値に収束する傾向をもち、実行放流量の時系列は周期性をもつこともわかる。これは、1回毎の操作で所要水量を確保しながら余剰流量を貯留し、累積した余剰貯留分を補充放流する手法であることを示している。

7. 結論 i)操作が長期にわたる異常渇水状態が予想された時点で、渇水確率を規準量にもつ操作手法を採用するのが有効と考えられる。ii)渇水確率を基準量とする手法は、流入量分布の推定により、操作期間を通じての流入量予測を織り込み得るし、貯水量状態の時々刻々の変化を勘案し得るために柔軟な操作手法となっている。

参考文献：「貯水池をもつ河川の渇水確率について」京大防災研年報11号(1968) 長尾正志