

## II-112 Peak Cut 制御についての一考察

神戸大学工学部 正員 ○神吉 和夫  
神戸大学工学部 正員 松梨 順三郎

1. まえがき 貯水池によって洪水のピークを下げる制御は一つの重要な制御方式であり、一定量放流方式がその基本である。ここでは、洪水が完全に予測される場合、確率的に予測される場合の Peak Cut 制御について考える。

2. Peak Cut 制御の定式化 貯水池(治水)容量を  $S_{max}$ 、時刻  $t$  の貯留量を  $S(t)$ 、貯水池への流入量、放流量をそれぞれ  $I(t)$ 、 $R(t)$  とする。通常、貯水池での水の挙動は連続の式で与えられ、

$$\frac{dS(t)}{dt} = I(t) - R(t) \quad (1) \quad \text{ここで } I(t), R(t) \geq 0, 0 \leq S(t) \leq S_{max} \quad (2)$$

今、 $t=0$  より制御を始めるものとし、洪水が時刻  $t_c$  に終了する場合、洪水ピークを下げるということとを、

$$J = \max_{t \in [0, t_c]} R(t) \longrightarrow \min \quad (3)$$

で表わすことにする。洪水が確率的に予測される場合は、その期待値の最小化を考える。

$$J = E \{ \max R(t) \} \longrightarrow \min \quad (4)$$

3. 洪水が完全に予測される場合 簡単化のため洪水が図-1に示すような単峰性の場合を考える。解の放流量ピークを  $R_{max}$  とする。 $R_{max}$  は初期貯留量  $S(0)$ 、 $S_{max}$ 、 $I(t)$  により決まり、次のように与えられる。

(i)  $\int_0^{t_c} I(t) dt \leq S_{max} - S(0)$  のとき 貯水池空容量が総流入量より大きいわけだから、その全てを貯留することにより放流ピークは最小化される

$$R_{max} = 0 \quad (5)$$

(ii)  $\int_0^{t_c} I(t) dt > S_{max} - S(0)$  のとき 予備放流を行なう。今、 $S(0)=0$  の場合の放流ピークを  $R^*$ 、その範囲を  $[t_1^*, t_2^*]$  とする、図-2。時刻  $t=t_1^*$  まで  $R^*$  以下の放流で貯水池を空にすることができれば、

$$R_{max} = R^* = I(t_1^*) = I(t_2^*) = \frac{1}{t_2^* - t_1^*} \left\{ \int_{t_1^*}^{t_2^*} I(t) dt - S_{max} \right\} \quad (6)$$

ここで、

$$T(t) = S(0) + \int_0^t I(t) dt \quad (7) \quad t_1^* = t_2^* - T(t_2^*)/R^* \quad (8)$$

を定義すると、 $t_1^*$  は  $R^*$  以下の放流で時刻  $t=t_2^*$  に貯水池を空にできる最終の予備放流開始時刻となり、図-3、 $R_{max}$  が式(6)で与えられるのは  $t_1^* \geq 0$  のときとなる。一方、 $t_1^* < 0$  であれば、 $R^*$  以下の放流では時刻  $t=t_2^*$  までに貯水池を空にできない。この場合、予備放流と洪水時放流を一致させれば良く、図-4、

$$R_{max} = I(t_1^*) = I(t_2^*) = \frac{1}{t_2^* - t_1^*} \left\{ \int_{t_1^*}^{t_2^*} I(t) dt - (S_{max} - S(t_1^*)) \right\} \quad (9)$$

ここで、

$$S(t_2^*) = S(0) + \int_0^{t_2^*} I(t) dt - R_{max} (t_2^* - t_1^*) \quad (10)$$

(iii)  $S_{max} - S(0) < \int_0^{t_c} I(t) dt \leq S_{max}$  のとき この場合も、予備放流と洪水時放流を一致させれば良く、放流ピークは式(9)、(10)で与えられる。

この制御の場合、放流量ピークを最小にする  $R_{max}$  が計算されても、放流ハイドログラフの一部は一意的には定まらない。そこで適当な補助操作ルールを決めなければならないが、洪水が完全に

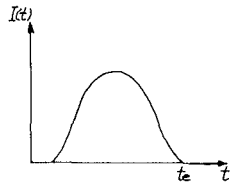


図-1

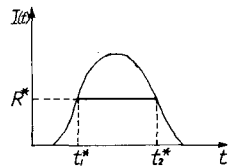


図-2

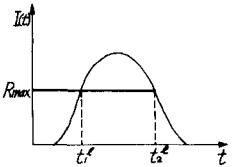


図-3

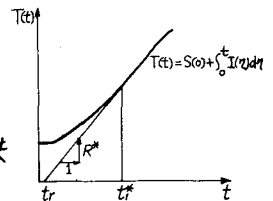


図-4

予測される場合は、それほど本質的問題でもないであろう。図-6は図-5の三角形ハイドログラフの洪水で  $I_p = 500 \text{ ton/sec}$ ,  $t_0 = 3 \text{ hours}$ ,  $t_L = 24 \text{ hours}$ ,  $P = 0.3$  および  $S_{max} = 800 \text{ 万 ton}$  としたときの  $R_{max}$  と初期貯水量  $S(0)$  の関係を示したものである。このように洪水が簡単な数式で与えられる場合は、 $R_{max}$  を容易に計算することができる。しかし、一般には適当な変数探索手法によらなければならないだろう。もっとも、そのときは洪水は単峰に限る必要は全く任意の形であって良い。

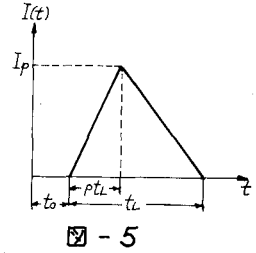


図-5

4. 洪水が確率的に予測される場合 ここでは、一定量放流方式と同様、放流量が流入量を越えないという制約を追加し、洪水としては図-5の三角形ハイドログラフを考え、そのパラメータ  $p, I_p, t_L$  が結合確率密度  $f(p, I_p, t_L)$  で予測される場合を想定する。

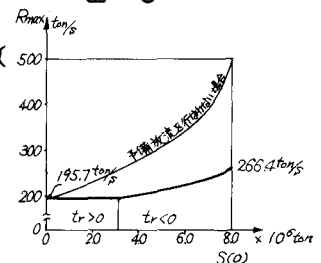


図-6  $S(0) \sim R_{max}$

$$R(t) \leq I(t) \quad (11)$$

計画最大放流量を  $+R$  とし、貯水池の操作ルールを次のように定める。

$$\left. \begin{aligned} I(t) < +R \text{ のとき } R(t) &= I(t) \\ I(t) \geq +R \text{ のとき } R(t) &= +R \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

このとき、 $(p, I_p, t_L)$  の組合せによって、実際に生じる放流量のピークは次のようになる。図-7. (a), (b), (c), (d)。

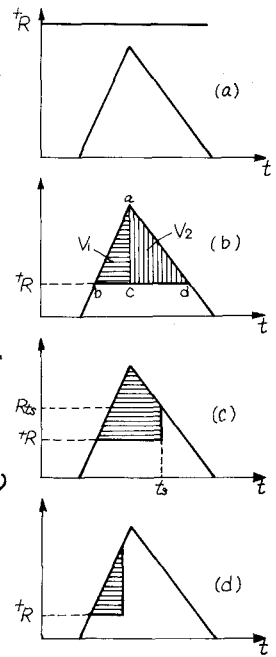


図-7

- (i)  $I_p < +R$  のとき  $R_{max} = I_p$  (13-1)
- (ii)  $I_p \geq +R$  で  $V_1 + V_2 < S_{max} - S(0)$  のとき  $R_{max} = +R$  (13-2)
- (iii)  $I_p \geq +R$  で  $V_1 < S_{max} - S(0) \leq V_1 + V_2$  のとき

$$R_{max} = R_{t2} = +R + \left[ \frac{2I_p}{(1-p)t_L} \left\{ \frac{t_L(I_p - +R)^2}{2I_p} - S_{max} + S(0) \right\} \right]^{1/2} \quad (13-3)$$

- (iv)  $I_p \geq +R$  で  $S_{max} - S(0) \leq V_1$  のとき  $R_{max} = I_p$  (13-4)

ここで、 $V_1, V_2$  はそれぞれ図-7(b)で a, b, c および a, c, d で囲まれる面積で

$$V_1 = p t_L (I_p - +R)^2 / 2 I_p \quad V_2 = (1-p) t_L (I_p - +R)^2 / 2 I_p \quad (14)$$

(i) ~ (iv) の  $(p, I_p, t_L)$  の組合せを  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  とすると

$$J = E\{\max R(t)\} = \int_{\theta_1} I_p f d\theta + \int_{\theta_2} +R f d\theta + \int_{\theta_3} R_{t2} f d\theta + \int_{\theta_4} I_p f d\theta \quad (15)$$

J を最小にする計画最大放流量を  $+R_{opt}$  とすると、 $+R_{opt}$  は

$$\partial J / \partial +R \mid_{+R = +R_{opt}} = 0 \quad (16)$$

により求まるであろう。

今、 $p, t_L$  が既知で  $I_p$  のみが不確定で  $g(I_p)$  の確率密度を持つ場合を考え

ると

$$J = \int_0^{+R} I_p g dI_p + \int_{+R}^{\alpha} +R g dI_p + \int_{\alpha}^{\beta} R_{t2} g dI_p + \int_{\beta}^{\infty} I_p g dI_p \quad (17)$$

ここで、 $\alpha, \beta$  は次式で与えられる。

$$\alpha = \{ t_L +R + S_{max} - S(0) + \sqrt{D} \} / t_L \quad D = \{ S_{max} - S(0) \} \{ 2 t_L +R + S_{max} - S(0) \}$$

$$\beta = \{ p t_L +R + S_{max} - S(0) + \sqrt{D'} \} / p t_L \quad D' = \{ S_{max} - S(0) \} \{ 2 p t_L +R + S_{max} - S(0) \}$$

$+R_{opt}$  を解析的に求めるのは困難で、3. と同様適当な変数探索法によらなければならない。図-8は  $I_p$  と  $R_{max}$  の関係を示したものである。具体的には計算モデルおよび計算結果については当日発表を行なう。

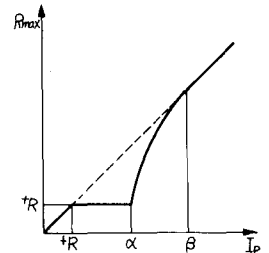


図-8  $I_p \sim R_{max}$

参考文献 藤原敏朗：貯水池群の運用計画について、水工学におけるランダム事象と最適化に関する諸問題、昭和47年度、土木学会関西支部講習会テキスト