

まえがき

自由地下水面の移動を伴う地下水流動に有限要素法を用いる場合、空間領域決定のアルゴリズムとそれによる近似解に対する適切な評価基準が必要である。本研究は、図1の単純領域に関する基礎的な吟味を通じて、いわゆる「時間に依存する系の有限要素近似解」の安定性とその簡略計算手法との関連を若干検討したものである。

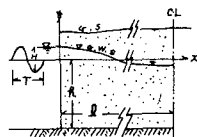


図1. 対象領域図

1. 基本式と計算アルゴリズム

図1の浸透領域を鉛直2次元、等方均質の透水管とし、基本式を(1)式とする。ここに、 $f = \varepsilon q$ 、 ε :有効間隙率、 k :透水係数、 r :浸入出水量である。一方この現象を不飽和型の(2)式として取扱う考え方もある。ここに、 m :土じょう水分、 D_i :水分拡散係数、 ψ :水分ポテンシャル。(1)式のFEMによる離散化式は(3)式、さらに、時間ステップの各種差分法に対する漸化式は(4)式となる。

$$f \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + r \quad (1)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + r \quad (2)$$

$$D_i = k_i(m) \frac{\partial \psi}{\partial m}$$

$$i = 1, 2$$

$$[C] \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\} + [K] \{\phi\} + \{R\} = 0 \quad (3)$$

ここに、 $[K]$ 、 $[C]$ は行列、 $\{ \}$ はベクトル、 θ はスキーム定数である。

$$\left[\frac{\theta}{2} [K] + \frac{1}{2\Delta t} [C] \right] \{\phi\}_k = \left[-\frac{(1-\theta)}{2} [K] + \frac{1}{2\Delta t} [C] \right] \{\phi\}_{k-1} - \frac{(1-\theta)}{2} \{R\}_{k-1} - \frac{\theta}{2} \{R\}_k \quad (4)$$

(4)式に対する計算アルゴリズムと実験値による検証結果($\theta = 1/2$ の場合)はすでに示している¹⁾。しかし、本研究に採用している「ある時刻について求められた水面における中の値を次の計算ステップの空間座標に直接使用する」いわゆる直接的な自由水面の決定方法について解の収束性の保証が与えられていなかった。そこで、熱流で代表される放物型偏微分方程式に関するFEM解の安定性の吟味、および具体的な収束性の検討を試みた。

2. 近似解の安定条件の考察

まず、藤井^{2,3)}が示した安定条件式と最大値原理を満たす条件式のうち、2次元の分布値量型に対する各値は図2となる。

つまり、安定条件は(5)式を満たせばよく、 $\theta > 1/2$ であれば、無条件に安定である。ここに、 K : 3角形要素の最小垂線長、 $\gamma_i = \sqrt{48}$ 。また、最大値原理を満たす条件は $\theta = 1/2$ では $\lambda (\equiv \frac{\Delta t}{K^2})$ が $1/2$ 以外にないが、平均2乗の意味で満たされる範囲は図中の曲線(b)の下となる。ただし、整形単体として $\sigma = -1/2$ を代入している。(σ : 鋭角度パラメータ)。つぎに、(6)、(7)式を定義する。

$$\frac{\Delta t}{K^2} < \frac{2}{K \gamma_i^2 (1-2\theta)} \quad (5)$$

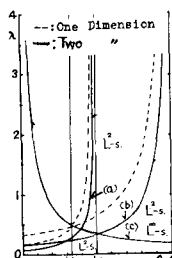


図2. 安定領域(分布型)

これらは、ノルムとリプシッツ係数に

$$\| \Delta \phi \| = | \phi_i^{(n+1)T} - \phi_i^{nT} | \quad (6)$$

等価と考える。つまり、定常的な周期性を利用した収束パラメータとみなす。

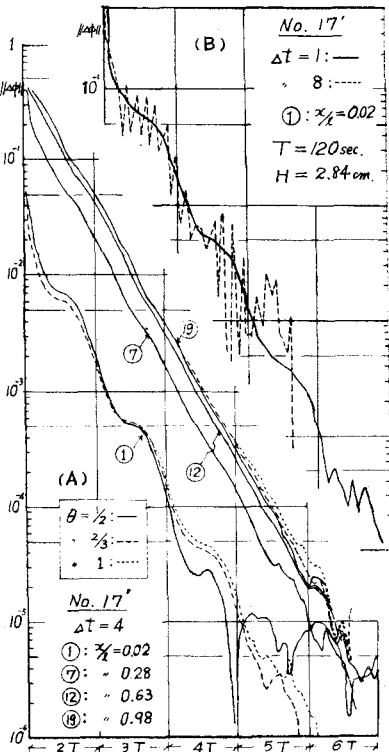
$$\lambda = \frac{|\phi_i^{(n+1)T} - \phi_i^{nT}|}{|\phi_i^{nT} - \phi_i^{(n-1)T}|} \quad (7)$$

$$i = 1, 2, \dots, T/\Delta t$$

ここに、 ϕ_i^{nT} : n 周期目の i 時刻の中での値。

3. 計算例の検討

各ケースとも初期条件は静止平均水位とし、上昇から始まる。諸条件

図3. ノルムの値 (Hale-Shaw M.) $k = 11.35 \text{ cm}$
 $q = 42.0 \text{ cm}$

は一部を除き実験条件と同じである。まず、1ルムの例を図3に示す。図3(A)から境界近傍で若干波打りが減少傾向は良好である。ただし、 Δt の値が適正でない場合(同図(B)), 好ましくない状態となる。つぎに、収束率について、図4は θ による対比の例であり、 θ は大きい程良好である。これは図3(A)でも認められる。図5は Δt による比較例で、このケースには $\Delta t \leq 4 \text{ sec}$ がよい。また、図6は、周期の値以外はほぼ同一条件の各ケースの入値を示す。これらから、 $T=120, 60$ のケースでは好ましく無い傾向が現れる。一方、図7のNo.88はNo.8の条件のうち l を4倍にした場合の数値実験結果であるが、境界から離れた地盤の入値は、図6の T が小さい場合にみられる傾向と同様なものとなる。要素分割は図8(A)であり、これらの最小垂線長の計測結果の1例を図8(B)に示す。周期的に5%程度(最小値が基準)増加する。ただし、 Δt が不適切なときには変動幅が大きくなる。

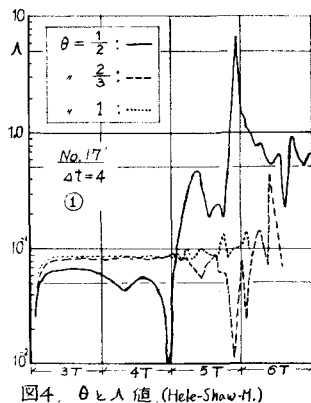


図4. θ と入値 (Hele-Shaw-H.)

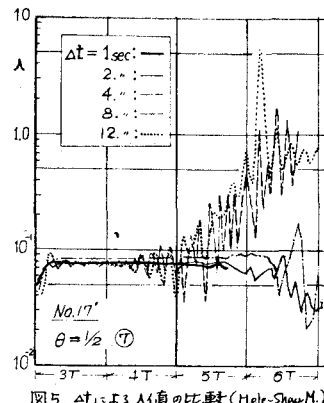


図5. Δt による入値の比較 (Hele-Shaw-H.)

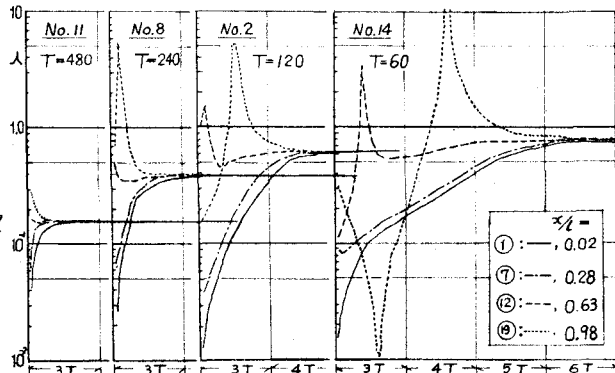


図6. 周期・異なるTケースの入値 (Sand Model), $l=300, T, h=34 \text{ cm}$.

4. まとめ

安定条件の範囲 : (i) 図2から2次元は1次元10の条件より厳しく、 $\theta \geq 0.5$ のスキームが有利である。(ii) 一様に安定(l^2-s)でなくとも平均2乗(l^2-s)の意味で安定性が保たれば、荒く云って、収束性も保証されるといえる。

収束性 : (iii) (6)(7)の定義式は通常の諸式より厳しい条件と考えてよい。なお、図3~6の第5周期以降の発散は、桁落ちに起因するようである。

(iv) スキーム差による安定性も定量的に評価する必要がある。つまり、実用上の精度は3~4周期

目の値で有効であるから、十分安定なスキームを選ぶべきである。(v) 本例では Δt の基準値は $\Delta t \leq 1/30$ 程度と考えてよい。しかし、図6から周波数そのものによる制約が存在するようである。(1) θ が大きいと線形的でなくなる⁽¹⁾。(vi) 図6と図7の(不都合であるが)共通の傾向は今後究明する。要素の最小垂線長 : (vii) 図8のように Δt がある値以下になると同一の大きさのK値となり興味深い。

以上、本報告では安定性に関する概略の特性が明らかとなり、全体として、本研究に用いた簡略手法が一応妥当な結果をもたらすと判断される。しかし、これらを実用上の評価基準に普遍化するには至っていないので、今後、計算技法上の改良とともに、定量的な評価を加えたい。

最後に、本研究は文部省科学研究費に負うこを付記する。また、計算には京大 FACOM 230-75と愛媛大 FACOM 230-28 を使用した。参考文献: 1) 大橋: 農業土木年報, p188-189, 土木学会年次講演 II, p372-373, 1973.

2) 京大数理研究所講義録, No.202, 1974. 3) 藤井・三好: 有限要素法の応用, Vol.5, No.4, 5.9, 1973