

京都大学工学部 正員 高梅琢馬
 京都大学工学部 正員 池淵周一
 名古屋大学 正員 山田孝司

1. はじめに

長期流出系はその対象期間が長く、しかも多くの因子が複雑にからみあって流出過程を形成している。したがって、こうした流出機構の解明には決定論的アプローチのみならず確率論的アプローチが必要であり、本研究ではとくに流出過程に内在する不確定性を積極的に受け入れる立場になつた Shannon 情報理論の概念を流出モデルの構成に適用しようとしたものである。すなわち、長期流出系のエントロピー的解釈を試みるとともに、流出系に最大エントロピーが内蔵されていることを仮定することによって、流出状態間の遷移構造を確率論的に表現し、流出シミュレーション法を提案した。なお、内容の一部については19回水理講演会で発表したことを断っておく。

2. マルコフ型情報源のエントロピーとエントロピー最大仮説

1) 離散的単純マルコフ型情報源のエントロピー；ある確率事象が生起することを図-1の Shannon 線図上で、1つの状態から他の状態へ遷移することと考え、その起り方を状態から状態への遷移確率によって表現する。すなわち、1つの状態 E_i から他の状態 E_j へ、第 s 番目の有向線が矢印の方向にたどる条件つき確率 $P_i(j, s)$ 、 E_i から E_j への有向線 s に対応して情報源から生起する事象を $L_{ij}^{(s)}$ 、および状態 E_i にある確率を P_i とすると、この情報源のエントロピーは次式で表わされる。

$$H = - \sum_{i,j,s} P_i \cdot P_i(j, s) \log P_i(j, s) \quad (1)$$

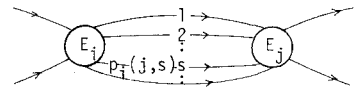


図-1 シヤノン線図

2) エントロピー最大仮説；以上述べたエントロピーの概念を、具体的に水文現象に適用すると次のように考えることができる。つまり長期流出の解析は多数の流出サイクルを対象とするので、一般には不確

実性が大きく、よってエントロピーは一般に大きい。流出サイクル数がさらに増加すると、不確実性も増大し、次第にエントロピーは最大値に近づき、定常的性格をもつようになる。このことは長期流出系においては状態の遷移を多くの系列について調べれば、その遷移確率はある定まった値に近づくことを意味し、つまり大数の法則の成立を意味するものであるから、状態の遷移については平衡系を想定しているということであり、このときエントロピーは最大値をとる。したがって、長期流出系の状態遷移にはエントロピー最大仮説が成立するものと考えられる。なお、高確率群に属する日流量は一般に対数正規分布に従うことが知られているが、このことも長期流出系の不確実性からエントロピー的に解釈でき、Shannon の情報理論でいう標準偏差の指定された場合の最大エントロピーをもつ確率分布に相当している。これは情報理論的エントロピーによる解釈であるが、統計学的エントロピーによる解釈を試みるならばつぎのように考えられよう。すなわち、流出系内の水分子の総体は、流域という開放された容器のなかで、瞬間的には動的な平衡状態を保ちつつ、最終的にはより安定な静的状態に達すべく運動している。降水が流域内に降ると、その平衡状態は破れ、一時的に水分子は自由で無秩序な運動を抑制されるが、やがて再び動的な平衡状態に帰着する。現段階では、こうした解釈はエントロピー増大はいえども最大になるところまでは致っていない。しかし、こうした力学的エントロピーからの解釈は、物理的な意味からもエントロピー最大ということの現象的に妥当な意味をもちうる可能性を提示するものであろう。

3. 降雨情報を考慮した流出状態遷移確率法

情報理論でいう雑音のある通信系とは、通信系の状態が β_{in} があるとき、送信信号 α_t が送られると受信信号 y_t が受信され、通信系の状態が β_{out} に変わる現象が $P_{\alpha_t, \beta_{out}}(y_t, \beta_{out})$ で起るというものである。われわれが対象と

する降水-流出変換系-流量の関係を考えると、雑音のある通信系によく類似しており、図-1のShannon線図とも対応させながら、長期流出系の確率的内部構造をつぎのように考えた。すなわち、流出変換系は有限個の内部状態をもち、その出力に現われる流量は変換系に加わる雑音のために、入力である降水と変換系の内部状態によって確率的に定まるものとした。内部状態を何で表現するかはきわめて難しい問題であるが、いま計量可能なものとして流量の m 重系列で定義するものとする、その状態に降雨 S が加わると、内部状態は他の内部状態に遷移すると同時に、遅れ時間 $t_{ij}^{(s)}$ をもって流量 $Q_{ij}^{(s)}$ を発生するという状況を想定することができる。そうすると、2.1)で述べたマルコフ型情報源のエントロピー定義式を用いて、単位時間当りのエントロピーが次式で与えられる。

$$H' = - \sum_{j,s} P_i P_i(j,s) \log P_i(j,s) / \sum_{j,s} P_i P_i(j,s) \cdot t_{ij}^{(s)} \quad (2)$$

このように考えるとわれわれは状態の遷移を遷移確率 $P_i(j,s)$ で論じようとしているわけであり、つぎの段階として上記のエントロピーを用いて遷移確率を求めることになる。ところで、2.2)で述べたように、少なくとも情報論的に解釈すれば、長期流出系にはエントロピー最大仮説が内蔵されているから、このことを利用すると、降雨に関する情報を満足しながらエントロピー H' を最大にすることによって遷移確率 $P_i(j,s)$ が"つぎ"のようにして求まる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \sum_i P_i &= 1 \\ \sum_{j,s} P_i P_i(j,s) &= P(S) \\ \sum_{j,s} P_i P_i(j,s) &= P_j \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

を規格化条件として(2)式を最大にするわけで、Lagrangeの未定係数法を用いると降雨確率 $P(S)$ が状態 i に関して一定であると仮定して $P_i(j,s)$ は次式で与えられる。

$$P_i(j,s) = P(S) \cdot \exp[-t_{ij}^{(s)} \cdot C] / \sum_j \exp[-t_{ij}^{(s)} \cdot C] \quad (4)$$

ここに、 C は(2)式の最大値で次式を満足する。

$$\sum_s P(S) \log P(S) / \sum_j \exp[-t_{ij}^{(s)} \cdot C] = 0 \quad (5)$$

また、 $P(S)$ が各状態で一一定値をとらないとすると、状態 E_i のとき S なる降雨の生起確率 $P_i(s)$ を用いて、近似的に、

$$P_i(j,s) = P_i(s) \exp[-t_{ij}^{(s)} \cdot C] / \sum_j \exp[-t_{ij}^{(s)} \cdot C] \quad (6)$$

で与えられる。 C は次式を満す。

$$\sum_s P_i(s) \log P_i(s) / \sum_j \exp[-t_{ij}^{(s)} \cdot C] = 0 \quad (7)$$

このようにして $P_i(j,s)$ が求められると、Shannon線図上を連続的に遷移することによって流量系列 $\{Q\}$ が降水シミュレーション-流出モデルを介さず直接的にシミュレーションでき、しかも特性値としては $t_{ij}^{(s)}$ だけであるので水位記録だけでもこの方法を展開することができる。

4. 由良川流域荒倉地点への適用と結果に対する考察

いま、簡単のため $m=1$ として(6)式を荒倉地点に適用した。表-1はこの地点の28年~48年の間の降雨期(5月1日~11月30日)の降雨・流量資料 $t_{ij}^{(s)}$ の値であり、表-2はこの期間の $P_i(j,s)$ に関する実測値(下段)と理論値(上段)を比較検討したものである。なお、流出状態および降雨規模は表-3のように定義している。表から明らかなように、実測値と理

表-1 $t_{ij}^{(s)}$ の値(日単位)

		E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
S_1	E_1	1					
	E_2	2	1				
	E_3	3	1	1			
	E_4	5	3	1			
	E_5	8	4	2	1		
	E_6	11	6	4	2	1	
S_2	E_1	1	1				
	E_2	2	1				
	E_3	5	2	1			
	E_4	7	4	2	1		
	E_5	8	4	2	1		
	E_6	11	7	4	2	1	
S_3	E_1	2	1	1			
	E_2	4	2	1			
	E_3	8	4	1			
	E_4	9	6	3	1		
	E_5	9	6	3	2	1	
	E_6	9	6	3	2	1	
S_4	E_1	3	2	1			
	E_2	7	4	2	1		
	E_3	8	6	4	1		
	E_4	8	5	4	1	1	
	E_5	10	6	5	3	2	1
	E_6	11	6	5	3	2	1
S_5	E_1	8	4	3	2	1	1
	E_2	9	6	4	2	2	1
	E_3	9	6	4	2	2	1
	E_4	12	7	4	3	2	1
	E_5	13	8	4	3	2	1
	E_6	16	10	5	3	2	1

論値は全状態にわたりかなりよく一致しており、最大エントロピー仮説の妥当性、(6)式で示された理論式の適合性が実証されているといえよう。

なお、ここには示さなかったが、(4)式を用いた理論値は大流出量状態に大降雨が作用した場合の遷移確率において一致度が悪いが、こうした低確率群においては $P(S)$ が状態にかかわらず一定であるという仮定が崩れる可能性があり、高確率群に属する現象把握に適する本方法においてはむしろこうした場合を除去する必要がある。

5. あとがき

本研究では状態の定義としての流量の m 重系列で m_j の評価とのかねあいから、 $m=1$ としたが、今後は状態の定義を明確にしていくとともに、他流域への適用をおこなって、本研究の適応性をさらに実証していきたい。

【参考文献】

1). 高橋琢馬・池淵周一; シェノン情報理論からみた水文現象の不確定構造

第19回 水理講演会 昭50.2

表一2 $P_{ij}^{(n)}$ の比較
上段：理論値 下段：実測値

		E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
E_1	S_1	0.786 0.767	0.0 0.017	0.0 0.001	0.0 0.001		
	S_2	0.069 0.113	0.069 0.021	0.0 0.002	0.0 0.001	0.0 0.0	
	S_3	0.006 0.017	0.023 0.021	0.023 0.012	0.0 0.001		
	S_4	0.001 0.001	0.003 0.002	0.011 0.009	0.0 0.001	0.0 0.001	
	S_5		0.0 0.0	0.0 0.0	0.001 0.002	0.002 0.002	0.002 0.002
E_2	S_1	0.145 0.194	0.554 0.492	0.0 0.010	0.0 0.001	0.0 0.0	0.0 0.001
	S_2	0.031 0.008	0.141 0.146	0.0 0.002	0.0 0.001	0.0 0.0	
	S_3	0.001 0.005	0.017 0.022	0.063 0.048	0.0 0.005		
	S_4		0.0 0.003	0.003 0.003	0.013 0.008	0.0 0.002	
	S_5		0.0 0.0	0.0 0.002	0.004 0.004	0.004 0.005	0.015 0.013
E_3	S_1	0.020 0.012	0.300 0.284	0.300 0.317	0.0 0.007		
	S_2	0.0 0.0	0.048 0.073	0.185 0.139	0.0 0.019	0.0 0.0	0.0 0.002
	S_3		0.002 0.009	0.084 0.051	0.0 0.024		
	S_4		0.0 0.002	0.001 0.005	0.040 0.030	0.0 0.005	
	S_5		0.0 0.0	0.0 0.0	0.002 0.0	0.002 0.002	0.011 0.014
E_4	S_1	0.002 0.0	0.033 0.011	0.494 0.354	0.0 0.154	0.0 0.005	0.0 0.005
	S_2	0.0 0.0	0.002 0.0	0.040 0.077	0.151 0.105	0.0 0.005	0.0 0.005
	S_3	0.0 0.0	0.0 0.0	0.008 0.033	0.118 0.094		
	S_4	0.0 0.0	0.0 0.0	0.001 0.011	0.040 0.028	0.040 0.022	0.0 0.022
	S_5	0.0 0.0	0.0 0.0	0.001 0.011	0.003 0.0	0.013 0.016	0.049 0.033
E_5	S_1	0.0 0.0	0.008 0.020	0.104 0.041	0.400 0.428	0.0 0.020	
	S_2	0.0 0.0	0.002 0.0	0.033 0.020	0.127 0.081	0.0 0.020	0.0 0.040
	S_3	0.0 0.0	0.0 0.0	0.003 0.001	0.012 0.006	0.045 0.024	
	S_4	0.0 0.0	0.0 0.0	0.0 0.020	0.040 0.020	0.020 0.041	0.091 0.041
	S_5	0.0 0.0	0.0 0.0	0.0 0.001	0.007 0.061	0.027 0.020	0.105 0.061
E_6	S_1	0.0 0.0	0.0 0.0	0.002 0.0	0.040 0.140	0.150 0.053	
	S_2	0.0 0.0	0.0 0.0	0.004 0.0	0.065 0.157	0.246 0.123	0.0 0.035
	S_3	0.0 0.0	0.0 0.0	0.008 0.0	0.037 0.052	0.118 0.105	
	S_4	0.0 0.0	0.0 0.0	0.0 0.001	0.001 0.006	0.006 0.006	0.026 0.035
	S_5	0.0 0.0	0.0 0.0	0.001 0.0	0.015 0.035	0.058 0.053	0.223 0.211

表一3 降雨・流量規模

class of rainfall	daily rainfall(mm/day)
S_1	0 - 5
S_2	5 - 20
S_3	20 - 40
S_4	40 - 60
S_5	60 - 120
class of discharge	daily discharge(m/sec)
E_1	0 - 5
E_2	5 - 10
E_3	10 - 20
E_4	20 - 40
E_5	40 - 60
E_6	60 - 250