II-86　地点雨量からの流出計算の試み（2）

法政大学　正会員　西谷 隆亘

1. はじめに

シャーマンによるユニットハイドログラフ法の仮定は、個々の降雨による流出は、その降雨量に「比例」し、「重ね合せ」が可能（線型性）であることから出発して、計算の便宜上、和をとる項数を限定する必要から「基底長一定」の仮定を設け、更に、計算打切りによる誤差を基底流で表わしたと考えることもできる。

基底流の表わし方（ハイドログラフの分離）に種々の問題があり、基底流出量一定の場合、基底長が充分長くとれない時は、考えている継続時間の範囲内でのハイドログラフの減水部の性状を表わし得ないことがある。そのような場合、減水部の性状をとり入れた計算式の表現をすることが必要であり、本稿では、自己回帰模型を考えて、直接に、多地点での降雨観測データを入力とした流出計算の結果を報告するものである。

2. 自己回帰模型とユニットハイドログラフ法

自己回帰模型は、ハイドログラフ減水部について調べれば、簡単に思いつくものであるが、ここでは、ユニットハイドログラフ法との関係を簡単に考察しておく。

i) ユニットハイドログラフ法

流域内にmヶの観測点があり、j番目の観測点のユニットハイドログラフを$\{u_{i,j}; i=0,1,2,\cdots\}$とし、その地点の観測降雨を$\{p_{i,j}; -\infty<i<t$の整数$\}$とすると、「比例」と「重ね合せ」の仮定により、時刻tでの流量$q(t)$は

$$q(t)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{\infty}p_{t-i,j}u_{i,j} \qquad (1)$$

である。しかし、実用計算上ではiを無限にとる訳には行かない。この困難を避けるために、充分大きな有限なN_jに対しては

$$q_s(t)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=N_j+1}^{\infty}p_{t-i,j}u_{i,j} \qquad (2)$$

$$q(t)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{N_j}p_{t-i,j}u_{i,j}+q_s(t) \qquad (3)$$

$q_s(t)$は（2）式以外の簡単な表現がとれるものとして、（1）式を分離して、（3）式が成立するとしたのが、シャーマンによるユニットハイドログラフ法の要点であり、N_jは一定値をとるものとした。当然の事ながら、（3）式の積和の項が直接流出，$q_s(t)$は基底流出，N_jは基底長である。

N_jをどれ位にするかにより、ユニットハイドログラフを決定する計算の難易が決まるし、$q_s(t)$の表現が、全体の精度を決める。（3）式の積和の項は、降雨終了時刻より基底長の長さN_jだけしか影響を持たないので、計算手段の制約により、考慮している洪水の継続時間に対して、N_jが充分長くとれない場合は、減水部は$q_s(t)$だけにより表現されることになる。そうした場合、$q_s(t)$が減水部の性状を表現し得るものであることが必要である。水平分離法（$q_s(t)\equiv const.$），折曲点による方法など、減水部の性状を無視したハイドログラフの分離法は、いずれも、不充分である。

ii) ハイドログラフ減水部について

ハイドログラフの減水部は、よく知られているように、普通は、指数減水すると云われている。すなわち

$$q(t)=q_0e^{\alpha(t-t_0)} \qquad (4)$$

あるいは

$$q(t+1)=A\,q(t) \qquad (5)$$

と表現される。

ii) で述べたことに対する一つの妥協は、$q_s(t) = const.$

$$t_p = max\{(降雨終了時刻)_j + N_j\ ;\ j=1,2,\cdots,m\} \tag{6}$$

として、(3)式と(5)式を併用して

$$\begin{cases} t \leqq t_p \text{ の時、(3)式} \\ t > t_p \text{ の時、(5)式} \end{cases}$$

とすることである。 当然の事ながら、ハイドログラフの連続性を考えると、出水前の流量に関しても(5)式が成立している必要がある。しかし、計算が二つの式でなされるのは、いささか不便であり、もう一つの妥協は、次節のようにしてなされる。

iii) 自己回帰模型

(3)式は $t > t_p$ において、$q(t) = q_s(t)$ であり、その時(5)式による近似が成立することを拡張して、$q_s(t)$ に関して、常に、(5)式が成立するものと考えると

$$q_s(t+1) = A\, q_s(t) \tag{7}$$

となる。一方、(3)式より

$$q(t+1) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{N_j} P_{t+1-i,j} U_{i,j} + q_s(t+1) \tag{8}$$

を得る。

$$(8)式 - A\times(3)式:\ q(t+1) - Aq(t) = q_s(t+1) - Aq_s(t) + \sum_{j=1}^{m}\{P_{t+1,j}U_{0,j} + \sum_{i=1}^{N_j} P_{t+1-i,j}(U_{i,j} - AU_{i-1,j}) - AP_{t-N_j,j}U_{N_j,j}\} \tag{9}$$

(7)式を考慮して、整理すると

$$q(t+1) = Aq(t) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{N_j+1} P_{t+1-i,j} U'_{i,j} \qquad ここに、\ U'_{i,j} = \begin{cases} U_{0,j} & ;\ i=0 \\ U_{i,j} - AU_{i-1,j} & ;\ i \neq 0, N_j+1 \\ -AU_{N_j,j} & ;\ i = N_j+1 \end{cases}$$

この式は、あらためて、(N_j+1) を N_j、$U'_{i,j}$ を $U_{i,j}$ と書くと、次のような回帰式を得る。

$$q(t+1) = Aq(t) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{N_j} P_{t+1-i,j} U_{i,j} \tag{10}$$

計算の便利のために、(10)式をマトリクス表示にしておく。

$$\mathbb{q}(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ q(t+1) \\ q(t+2) \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad \mathbb{P}_j(t) = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} P_{t,j}, & P_{t-1,j}, & P_{t-2,j}, & \cdots \\ P_{t+1,j}, & P_{t,j}, & P_{t-1,j}, & \\ P_{t+2,j}, & P_{t+1,j}, & P_{t,j}, & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}}_{\ell_j\ 列} \end{bmatrix} \qquad \mathbb{U}_j = \begin{bmatrix} U_{1,j} \\ U_{2,j} \\ \vdots \\ U_{\ell_j,j} \end{bmatrix}$$

とおき、計算値に^をつけることにすると、(10)式を最小自乗法で解くと

$$\begin{bmatrix} \hat{A} \\ \hat{\mathbb{U}}_1 \\ \hat{\mathbb{U}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbb{U}}_m \end{bmatrix} = (\mathbb{P}'_{t+1}\mathbb{P}_{t+1})^{-1}(\mathbb{P}'_{t+1}\mathbb{q}(t+1)) \tag{11}$$

但し、$\mathbb{P}_{t+1} = [\mathbb{q}(t), \mathbb{P}_1(t+1), \mathbb{P}_2(t+1), \cdots, \mathbb{P}_m(t+1)]$

本稿では、(11)式を用いて得られた結果を用いて、その再現性を検討する。

3. おわりに

前回の報告は、ユニットハイドログラフ法の単純な拡張であるため、基底長に制約がある場合、減水部の性状を合わせることができなかった。今回は、減水部に焦点を合わせて、自己回帰模型をとり入れた。

人為的操作やデータ処理の任意性に、できる限り個人的判断が入らないことを目的として、生データの侭で、流出計算できる方式を目指しているが、実際の流出過程は、非線型性，非定常性を持っているので、更に、それを考慮できるモデルあるいは計算法が必要なことは論を俟たない。