II-81　瞬間単位図の確率モデル

東京都立大学工学部　正員　新井邦夫

1. はじめに

半乾燥地域に立地するアリゾナ州ツーソン市の市域内に設定された試験流域の観測資料をもとに、洪水流出モデルを開発する機会を得た。全く未知の地域における流出解析であったため、誤まった先入感を持つことの恐れから既存概念の採用を避け、確率原理を用いて流出現象を説明しようとした。ここではその論理構成を紹介し、批判を仰ぎたい。

2. 単位ハイドログラフの誘導

単位時間当りの有効降雨を無数の単位水粒子に分割し、それらがランダムな速度で滑落している斜面を想定する。速度がランダムであるとしたので、ある距離滑落後は2個以上の粒子が集団で滑落することはない。したがって斜面の下端にある測点で単位時刻に1個の粒子が通過する確率を $1-g$ とした時、1個の水粒子が通過した後 $t+1$ 単位時間目に次の粒子が通過する確率は

$P(t)=(1-g)g^t$　　　$t=0,1,2,\cdots\cdots$　(1)

なる幾何分布となる。

さらに、一般に r 番目の粒子が測点を通過する以前に t 個の時点で粒子が通過しない確率は、$r+t-1$ 個の時点のうち t 個の時点で粒子が通過せず、$r+t$ 個目の時点で通過していることを意味するから、

$P(t)=\binom{r+t-1}{r}(1-g)^r g^t$　　　$t=0,1,2,\cdots\cdots$　(2)

なる負の2項分布となる。

ここで実際の水の流下を考慮すれば、r は著るしく大きな値であり、g はほとんど0に近い値であるとしても矛盾はない。この2つの条件のもとで $r\cdot g=\lambda$ なる条件を加え(2)式の極限形を求めると、

$P(t)=\lambda^t e^{-\lambda}/\Gamma(t+1)$　　　$t=0,1,2\cdots\cdots$　(3)

なるポアソン分布となる。

以上の考察から明らかなように、(1)、(2)、(3)式はいずれも単位降雨があった時のハイドログラフを離散時間について示したものである。(1)式は線型貯留モデルにおいてタンクが1個の場合に相当し、(2)式が(1)式の r 重のたたみ込みであることから、(3)式はタンクが無数連続している場合に相当する。斜面の粗度 ―― 一般に斜面ごとに粗度が異なるはずであるから、同一の長さを有する斜面であっても、単位ハイドログラフが同一の形状を示すとは限らない。最も簡単な形式で、このような斜面の性質をあらわす係数を考慮すれば、(3)式は；

$P(t)=(c\lambda)^t e^{-c\lambda}/\Gamma(t+1)$　　　$t=0,1,2,\cdots\cdots$　(4)

とあらためられよう。ここで c は斜面の粗度を示す定数で、相対的に大きければ流出のピーク時刻がおくれ、ハイドログラフはより偏平化される。流域における平均到達時間 ―― (3)式のパラメータ λ はハイドログラフの重心までの時間、すなわち平均到達時間をあらわす。したがって、基本的には、λ は斜面の長さに支配される。

さて面積を A とする流域において、平均到達時間が λ であるような斜面の長さを L_λ とした時、流域の最下流端にある測点と、そこから L_λ の距離にある点とを結ぶ地表上の最大傾斜線を斜面とする単位ハイドログラフが(3)式で示されるから、等しい平均到達時間を有する斜面の数は測点から L_λ にある全ての点を結んだ曲線(isochron)の長さ dA/dL_λ 分あり、さらに流域全体では、dA/dL_λ を測点から流域の最上流端まで積分した数あることになる。

例えば、流域形状をダ円とし、その軸端を中心とする円の半径とその円の流域界によって切られる弧の長さとの関係を調べれば容易に理解できるように、L_λの分布をある種の確率分布と仮定することは可能である。ただ実際の流域では、地形構成が複雑であるため、水の流下に著しく長時間を要する斜面があると考えられる。したがって実際のL_λの最大は、上で述べた単純なダ円の例のように有限ではなく、無限大とする方が自然である。L_λとλは比例関係にあるからλの分布はL_λの分布に一致する。以上のことからλの分布を次に示すようガンマ分布と仮定しても、何等矛盾はない。

$$g(\lambda)=\alpha^{j}\cdot\lambda^{j-1}\cdot e^{-\alpha\lambda}/\Gamma(j) \quad \cdots\cdots(5)$$

ここでj, αは流域固有の性質(主として形状)をあらわす定数である。単位ハイドログラフの誘導 — 表面の状態が一様((4)式のcが流域内で不変)であるような流域の単位ハイドログラフは、(4)式と(5)式の結合確率密度関数として求められ、複合ポアソン分布の定義により次のごとくあらわすことができる(1)。

$$I(t)=\int_0^\infty g(\lambda)\cdot P(t)\,d\lambda=\int_0^\infty\{\alpha^{j}\cdot\lambda^{j-1}\cdot e^{-\alpha\lambda}/\Gamma(j)\}\{(c\lambda)^{t}e^{-c\lambda}/\Gamma(t+1)\}\,d\lambda \quad \cdots\cdots(6)$$

(6)式の母関数は

$$G(\theta)=\sum_{t=0}^{\infty}e^{i\theta t}\int_0^\infty\{\alpha^{j}\cdot\lambda^{j-1}\cdot e^{-\alpha\lambda}/\Gamma(j)\}\{(c\lambda)^{t}e^{-c\lambda}/\Gamma(t+1)\}\,d\lambda \quad \cdots\cdots(7)$$

となり、被積分関数が収束することを知って整理し、さらに$\lambda(\alpha+c-e^{i\theta}c)=u$と置き、計算すると、

$$G(\theta)=\{\alpha/(\alpha+c-e^{i\theta}c)\}^{j} \quad \cdots\cdots(8)$$

となる。(8)式の左辺の分母分子をαで割りc/αをあらためてcとおけば、

$$G(\theta)=1/(1+c-e^{i\theta}c)^{-j}=(1+c)^{-j}\{1-c\cdot e^{i\theta}/(1+c)\}^{-j} \quad \cdots\cdots(8)'$$

となる。$\theta=0$とし(8)′式の左辺を展開すると、

$$G(0)=(1+c)^{-j}\left[1+\{j/1!\}\{c/(1+c)\}+\{j(j+1)/2!\}\{c/(1+c)\}^{2}+\cdots\cdots\right] \quad \cdots\cdots(9)$$

となるので、求める単位ハイドログラフは

$$\left.\begin{aligned} I(0)&=(1+c)^{-j}\\ I(t)&=(1+c)^{-j}\{j(j+1)\cdots(j+t-1)/t!\}\{c/(1+c)\}^{t} \qquad t=1,2,\cdots\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(10)$$

となる。

$c=d$, $j=h/d$とおきかえるまでもなく(10)式はポリヤーエッゲンベルガー分布として知られる分布であり、$j=1$なる時は指数分布に他ならない。

(10)式の平均および分散は、それぞれ $E(t)=G'(0)/i=j\cdot c$ $\cdots\cdots(11)$ $V(t)=G''(0)/i^{2}-\{E(t)\}^{2}=j\cdot c(c+1)$ $\cdots\cdots(12)$ となる。

3、有効降雨

時間的に連続する降雨を単位時間ごとに落下する水粒子の連続と考える。粒子が地表面に到達後生じうる事象は、浸透する事象と、それに背反する浸透しない事象以外にないとする。今n個の粒子が連続して落下してきた時、t個目($0<t\leqq n$)の粒子が浸透するかどうかは、$t-1$個目の粒子に生じた事象にほとんど依存すると考えられるのでこの系を単純マルコフ連鎖とすることができる。推移確率行列は$\begin{pmatrix}\alpha; & 1-\alpha\\ \beta; & 1-\beta\end{pmatrix}$と書ける。ここで、$\alpha$は$t-1$個目の粒子が浸透し、$t$個目の粒子も浸透する確率であり、$\beta$は$t-1$個目の粒子が浸透せず、$t$個目の粒子が浸透する確率である。全確率の定理により、t個目の粒子が浸透する確率は、$P_t=P_{t-1}\alpha+(1-P_{t-1})\beta\cdots(13)$となる。第1番目の粒子が浸透する確率を$P_1$とし、$P_t$を逐次求めると、連続降雨について考えるから常に$1>\alpha-\beta>0$が成立し、したがって$t\to\infty$なる時$P_\infty=\beta/\{1-(\alpha-\beta)\}$となるから、(14)式が得られる。

$$P(t)=(P_1-P_\infty)(\alpha-\beta)^{t-1}+P_\infty \quad \cdots\cdots(14)$$

4、結論　約20年前大久保により、流出現象への応用の可能性について示唆されながら、その後追証されなかったポリヤエッゲンベルガー分布は、Doogeの一般化をさらに進展させたモデルとしてとらえることができる。又マルコフ連鎖の初歩的応用により(14)式が得られたが、Hortonの浸透能の概念と矛盾するので、これについては検討の余地が有る。