II-70　河川流量における非定常時系列の解析について

正員　秋田工専　長谷部正彦

1　まえがき

時系列理論の適用は従来までは、ほとんど定常過程 or 弱定常過程における理論の適用と思われる。しかし実際には非定常の場合も少なくない。そこで一つの系列で確率分布，平均値等が時間と共に変化するがそれ以外変化がない場合(均一性)には、非定常線形過程として扱われる。例えば一つの系列のなかで適当な定差をとって定常過程として扱うことが可能である。本解析では、この非定常モデルを基本にした Seasonal Models を採用して、雄物川水系の椿川地点の月流量時系列(1953～72)を資料としてモデルの考察をした。

2　非定常線形過程

1)　季節性のない時系列

時系列理論では一般に自己回帰型(AR)，移動平均型(MA)，混合型(ARMA)として下記の式で表現される。

$\phi(B)Z_t = a_t$ ------ ①　　$\phi(B) = (1-\phi_1 B - \phi_2 B^2 ----- \phi_p B^p)$ P 次の自己回帰演算子

$\theta^{-1}(B)Z_t = a_t$ ----- ②　　$\theta(B) = (1-\theta_1 B - \theta_2 B^2 ----- \theta_q B^q)$ q 〃 〃 移動平均 〃 〃 〃

$\theta^{-1}(B)\cdot\phi(B) = a_t$ --- ③　　B 後進演算子

①式で検討すると定常過程では $\phi(B)=0$ の全ての根が単位円の外側に存在する。非定常線形過程では、$\phi(B)=0$ のいくつかの根は 1 で、残りの根は単位円の外側にある場合である。そこで d 個の根が 1 であり、また上の定ぎより，$\varphi(B) = \phi(B)(1-B)^d$ と表わされるので非定常線形過程では ①式は下記に示される。

$\varphi(B)Z_t = \phi(B)(1-B)^d Z_t = \phi(B)\nabla^d Z_t = a_t$ ------- ④　　$B=\nabla+1$.　$\varphi(B)$ 非定常自己回帰演算子

以上非定常線形過程は d 個の定差をとることによって定常過程として扱うことが出来る。一般には ARIMA (p,d,q) と呼ばれる。次に予測に関して ①式，ARIMA(1, 0, 0) モデルを考えると

$(1-\phi_1 B)Z_t = Z_t - \phi_1 Z_{t-1} = a_t$ ---------- ⑤

現在値 Z_t からの予測値 (lead time l) Z_{t+l} は ⑥式の様に陽形式で表示され、順次予測していく。

$Z_{t+l} - \phi_1 Z_{t+l-1} = a_{t+l}$　　$\left(\underset{t}{E}[Z_{t+l}] = \hat{Z}_t(l) \quad \underset{t}{E}[a_{t+l}] = 0 \right)$

$\hat{Z}_t(l) = \phi_1 \hat{Z}_t(l-1)$ ---------- ⑥　$(l \geq 2)$

なお、これは非定常過程においても同様である。

2)　季節性のある時系列

Seasonal Models は、非定常線形過程の応用で、季節 S によるモデルを $(\mathbb{P}, \mathbb{D}, \mathbb{Q})_S$ と表わし

$\Phi(B^S)\nabla_S^D Z_t = \Theta(B^S)\alpha_t$ -------- ⑦

となる。ここで α_t も季節性 S を除いた時系列として，モデル (p,d,q) と表わされる。

$\phi(B)\nabla_1^d \alpha_t = \theta(B)a_t$ --------- ⑧

⑦と⑧より Seasonal Models は ⑨式となる。(尚 $(p,d,q)\times(\mathbb{P},\mathbb{D},\mathbb{Q})_s$ とも表現できる。)

$\Phi(B^S)\phi(B)\nabla_1^d \nabla_S^D Z_t = \Theta(B^S)\theta(B)a_t$ ------------ ⑨

S は本解析では 12 である。$(\nabla_1 = 1-B,\ \nabla_S = \nabla_{12} = 1-B_{12})$

3　月流量への適用

図 1 には、Z_t，∇Z_t，$\nabla_{12} Z_t$，$\nabla\nabla_{12} Z_t$ の自己相関々数の図を示してある。ここの例では、モデル $(0,1,1)\times(0,1,1)_S$ について考察していく。

$\nabla\nabla_{12}Z_t$の自己相関係数ρ_1，ρ_{12}から，モデルのパラメーターθ_0，Θ_0を同定すると　$\theta_0=0.6821$，$\Theta_0=0.4165$を得た。次にθ_0，Θ_0を初期値とし，下記の式で$[a_t-a_{t,0}]$を最小にする

$$a_{t,0}=(\theta-\theta_0)x_{1,t}+(\Theta-\Theta_0)x_{2,t}+a_t$$

$$x_{1,t}=-\left.\frac{\partial a_t}{\partial\theta}\right|_{\theta_0,\Theta_0}\qquad x_{2,t}=-\left.\frac{\partial a_t}{\partial\Theta}\right|_{\theta_0,\Theta_0}$$

ようにしてθ，Θをくり返して決定した。表1に示してある。尚その時のθ，Θの誤差の分散は，$\sigma(\theta)\cong 0.03$　$\sigma(\Theta)\cong 0.05$である。　表2には$(0,1,1)\times(0,1,1)_S$以外の3つのモデルとその時のパラメーター，分散を示してある。（実際には，まだ多くのモデルを適用しているのだが，分散の小さいモデルを示してある。）

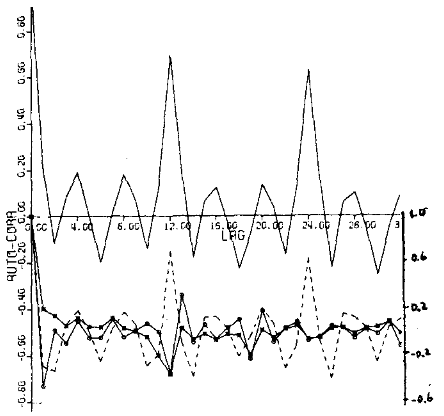

Fig 1

図2には，3つのモデルを採用して予測し実測値と比較してある。　この予測は3年間の様にみえるが，実際には$S=12$より，1年毎に予測して連続に3回予測している。

	Iteration	
0	0.6821	0.4165
1	0.8463	0.5984
2	0.8735	0.6652
3	0.8827	0.6851
4	0.8868	0.6921
5	0.8887	0.6949
6	0.8896	0.6960
7	0.8900	0.6964
8	0.8901	0.6966
9	0.8901	0.6966

Table 1

4　あとがき

非定常の季節性モデルで，河川流量に適用しましたが，定常時系列理論では，3つの成分に分けて，この理論を適用するが　周期成分についてForier級数であてはめると見かけ上の周期性が出る欠点がある。　がこのモデルでは1年周期だけで解析していくので物理的には前者に比べると意味があるように思われる。　また本例のように融雪時にピークがはっきりとでている場合，つまり季節特性がはっきりしている場合には有効である。本解析では228の資料であるが，データーが長くなるとまだ精度があがるであろう。このモデルの他の河川への適用，雨量等への適用などはもう少し検討していかなければいけないと思われる。

最後にいろいろと御指導してくれました北海道大学岸教授に感謝致します。計算は東北大学大型センター，また図面はX-Y・Plotterによる。

Fitted models	Variance
$(0,1,1)\times(0,1,1)_s$ $\nabla\nabla_{12}Z_t=(1-0.890B)(1-0.697B^{12})A_t$	101.4
$(1,0,0)\times(1,1,0)_s$ $A_t=(1-0.155B)(1+0.333B^{12})\nabla_{12}Z_t$	107.2
$\mathrm{Log}Z_t$: $(0,1,1)\times(0,1,1)_s$ $\nabla\nabla_{12}Y_t=(1-0.808B)(1-0.720B^{12})A_t$	0.36

Table 2

参考文献

Box. G and Jenkins, G
"Time series analysis forcasting and Control"

E.J. Hannan著
細谷雄三訳
"時系列解析"

細谷雄三
"時系列の推定問題"

岸　力
"線形確率過程の解析と予測"

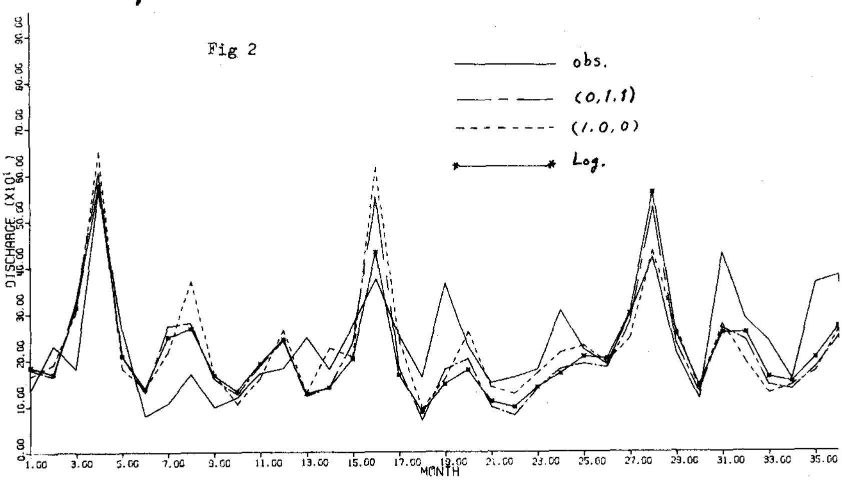

Fig 2