# II-4　水深変化と流れが同時に存在する場合の波の屈折計算

京都大学工学部　正　岩垣雄一，正　酒井哲郎，電信電話公社　正　○　津田俊雄

1．まえがき　河口付近の海浜変形を論じる場合には，海底形状による波の屈折とともに河口からの流れによる波の変形を無視することはできない。海底形状による波の屈折の問題は，線型の範囲では複雑な海底形状に対しても可能な数値計算の手法が確立されている[1]。一方，流れによる波の屈折に関しては，その原理は明らかにされてはいるが，具体的に海底形状と流れの流速分布を与えて計算したものとしては Arthur[2] のものしか見当らない。しかも，この場合，波は線型長波と仮定し，流れに対して相対的な波の位相速度を $\sqrt{gh}$ と与え，流れの影響を受けないとしている。しかし一般的には，流れに対する相対的な位相速度は流れの影響をうけて，流れのない場合の波速とは異なる[3]。また彼は屈折にともなう波高変化は議論せず，流れのみによる波の屈折計算においても，波と流れの非線型干渉[4]を考慮した数値計算手法はまだ確立されていないと思われる。ここでは，任意の海底形状と流れによる波の屈折を，流れによる相対的な波の位相速度の変化および波と流れの非線型干渉を考慮して求めるための，数値計算の手法を提案する。

2．屈折計算の基礎式　(1) 海底形状と流れによる波の屈折　流速が水深方向に一様とすると，海底形状と流れの両方による波の屈折はつぎのように与えられる[2]。すなわち (1) 式で与えられる経路に沿って進行する点Pから見た，波の峯線に直交する方向と $x$ 軸とのなす角度 $\theta$ の時間的変化は，(2) 式で与えられる。ここで，$x$，

$$\frac{dx}{dt}=u+C_*\cos\theta,\quad \frac{dy}{dt}=v+C_*\sin\theta \quad \text{-------(1)}$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta\right)\cos\theta+\left(-\frac{\partial v}{\partial y}\cos\theta+\frac{\partial v}{\partial x}\sin\theta\right)\sin\theta+\left(-\frac{\partial C_*}{\partial y}\cos\theta+\frac{\partial C_*}{\partial x}\sin\theta\right) \quad \text{-------(2)}$$

$y$ は平面の直角座標，$u$，$v$ は流れの $x$，$y$ 方向成分，$C_*$ は流れに対する波の位相速度である。したがって，計算領域の沖側境界において，初期の $C_*$（沖側境界で流れが存在しないとすれば，流れのない場合の微小振幅波の波速 $c$ に等しい）と $\theta$ を与えれば，流れがない場合の海底形状のみによる屈折計算と同様に，(1) 式で与えられる経路に沿って波の屈折を計算できる。しかしながら，(2) 式中の $\partial C_*/\partial x$，$\partial C_*/\partial y$ は，あらかじめ点Pの近傍の $C_*$ がわかっていてはじめて計算しうるものである。

(2) 流れに対する相対的な波の位相速度　上述の流れに対する相対的な位相速度 $C_*$ は，(3) 式で与えられる[3]。

$$C_*^2=\left(\frac{L_*}{T}-u\cos\theta-v\sin\theta\right)^2=\frac{gL_*}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi h}{L_*}\right) \quad \text{---------(3)}$$

$L_*$ は，流れによって変化した波長であり，(3) 式の第2式より $T$，$u$，$v$ および $\theta$ が与えられれば求められる。また $C_*$ は，この $L_*$ を第1式に代入すれば求められる。$\theta$ は (2) 式を計算してはじめて求められるものであるが，(1) 式にしたがって動く点Pの経路の最先端の近傍のうち岸側の領域では，(2) 式による $\theta$ の計算がまだされていないために，(3) 式による $C_*$ の計算もできていない。流れのない場合の屈折計算では，微小振幅波の範囲内で波の周期と水深を与えれば波速が求められるため，あらかじめ計算の全領域において波速やその微係数を与えておくことができる。この点が，流れが存在する場合としない場合の波の屈折計算における大きな相違である。

(3) 海底形状と流れによる波高の変化　海底形状のみによる屈折に伴う波高変化は，隣り合う波向線間を通過するエネルギーフラックスは一定として，簡単に計算される。しかしながら流れが存在する場合，流れと波との非線型干渉をも考慮すると，波高変化の計算はそれほど簡単ではない。流れが存在する場合の定常状態での波のエネルギーの平衡式は波の2次のオーダまででは (4) 式で与えられる[4]。ここで，$C_{g*}$ は (5) 式で与えられる流れに

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{E\left(C_{g*}\cos\theta+u\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{E\left(C_{g*}\sin\theta+v\right)\right\}+S_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}+S_{xy}\frac{\partial v}{\partial x}+S_{yx}\frac{\partial u}{\partial y}+S_{yy}\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad \text{---------(4)}$$

対して相対的な波の群速度，Sは(6)式で与えられる radiation stress ，Eは波のエネルギーで $E=1/8\cdot\rho g H^2$（H：波高）である。この式を数値計算するのに，ここでは(1)で述べた屈折の計算と同様の手法を用いること

$$C_{g*}=\frac{C_*}{2}\left\{1+\frac{2\pi h}{L_*}\Big/\sinh\left(\frac{2\pi h}{L_*}\right)\right\}, \quad \text{-------- (5)}$$

$$S_{xx}=\frac{EC_{g*}}{C_*}\cos^2\theta+\frac{E}{2}\left(\frac{2C_{g*}}{C_*}-1\right),\ S_{xy}=S_{yx}=\frac{EC_{g*}}{C_*}\cos\theta\sin\theta,\ S_{yy}=\frac{EC_{g*}}{C_*}\sin^2\theta+\frac{E}{2}\left(\frac{2C_{g*}}{C_*}-1\right) \quad \text{---------- (6)}$$

にする。すなわち，(7)式で与えられる経路を進行する点 P′ から見た波のエネルギーの時間的変化は，$d/dt=(u+C_{g*}\cos\theta)\partial/\partial x+(v+C_{g*}\sin\theta)\partial/\partial y$ とかけるので(4)式より(8)式のように与えられる。ここで F( )は(6)

$$\frac{dx}{dt}=u+C_{g*}\cos\theta,\quad \frac{dy}{dt}=v+C_{g*}\sin\theta \quad \text{------ (7)},\qquad \frac{dE}{dt}=-F(u,v,C_*,C_{g*},\theta)\cdot E \quad \text{-------- (8)}$$

式を用いると(9)式で与えられる。したがって沖側境界で，$C_*$，$C_{g*}$，$\theta$，$u$，$v$ が与えられれば，(1)の屈折計

$$F=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial C_{g*}}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial C_{g*}}{\partial y}\sin\theta+\left\{\frac{C_{g*}}{C_*}\cos^2\theta+\frac{1}{2}\left(\frac{C_{g*}}{C_*}-1\right)\right\}\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{C_{g*}}{C_*}\cos\theta\cdot\sin\theta\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\left\{\frac{C_{g*}}{C_*}\sin^2\theta+\frac{1}{2}\left(\frac{2C_{g*}}{C_*}-1\right)\right\}\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{------------- (9)}$$

算と同様に，(7)式で与えられる経路に沿って，波と流れの非線型干渉を考慮した屈折にともなう波高の変化が計算できる。ところが，この場合も(1)の屈折計算と同様の問題が生じる。すなわち，流れに対して相対的な群速度 $C_{g*}$ は，(5)式で与えられるが，$C_*$，$L_*$ は(2)で述べたようにあらかじめ計算できないので，$C_{g*}$ も計算できず，波高変化の式(9)式中の $\partial C_{g*}/\partial x$，$\partial C_{g*}/\partial y$ を求めるために必要な点 P′ の経路最先端より岸側の $C_{g*}$ が未計算のままとなる。

3. 数値計算の方法　流れに対する相対的な波の位相速度および群速度はあらかじめ与えることができず，したがってその勾配 $\partial C_*/\partial x$，$\partial C_*/\partial y$，$\partial C_{g*}/\partial x$，$\partial C_{g*}/\partial y$ が与えられない点を除けば，海底形状と流れの両方による波の屈折の計算は，2つの部分からなっている。すなわち，まず沖側境界上の各点から(1)式で与えられる経路に沿う(2)式の計算を行う。計算は $\Delta t$ 時間毎に行われ，経路上の各計算点上で，その点を通る波の峯に直交する方向とx軸とのなす角度 $\theta$ が計算される。この計算がすべての経路に沿って行われた後，計算の全領域で，$\theta$ が記憶される。その後，あらためて沖側境界上の各点から，(7)式で与えられる経路にそう(8)式の計算をすでに求められた $\theta$ を用いて行って，各経路の各計算点上で波高を計算する。ただし，この場合の経路は(1)式の経路とは異なる。さて，$\partial C_*/\partial x$，$\partial C_{g*}/\partial x$ 等の問題を検討するためにつぎのような3つの方法を考えた。すなわち，1) 流れに対する相対的な波の位相速度 $C_*$ および群速度 $C_{g*}$ として流れのない場合の周期と水深で与えられる波速 c および群速度 $C_g$ を用いる方法，2) $C_*$ および $C_{g*}$ の勾配のみ流れのない場合の値を用いる方法，3) 2) の方法で求められた全領域における $C_*$，$C_{g*}$ およびその勾配をこれらの量の初期値として，あらためて(2)式の計算を行なう。この計算で求められた $C_*$ およびその勾配を用いて再び(2)式の計算を行い，この操作をくり返す。最後にこうして得られた最後の $C_*$，$C_{g*}$ 等を用いて(7)式を計算する。

4. 計算例と考察　計算例として，等深線が海岸線に平行な海底勾配 1/40 の海岸を考え，図-1に示すような河口からの流れを与える。この海岸に周期 10 sec ，初期波向が海岸線に直角，初期の波高が 1m の波がやってきた場合を考える。この場合の計算を，3. で述べた 3) の方法（繰り返し回数5回）で行った結果を，図-2，および3に示している。図-2は波峯線の分布，図-3は初期波高との比を等波高比線図として示している。図中の破線は，砕波線を示している。なお計算の時間ステップ $\Delta t$ は 5sec である。

一般に，流れがある場合，波長 $L_*$ は流れがない場合の波長 L よりかなり変化するが，浅海波の場合には流れに相対的な波の位相速度 $C_*$ と流れがない場合の波速 c との差は，波長の場合ほど顕著でない。また流れに対する相対的な群速度 $C_{g*}$ と流れがない場合の $C_g$ との差は，$C_*$ のそれよりもやや大きい。一方深海波の場合は，$C_*$，$C_{g*}$ とも c，$C_g$ との差は大きい。したがって，一般的に，浅海波で流速が小さい場合は 1)，2) の方法でもよいが，流速が大きい場合また深海波の場合は 3) の方法を用いる必要がある。なお，図-3の等波高比線には顕著な脈動が生じているが，その原因の1つとして，計算結果を図示するためのプログラムに欠陥があった

ものと考えられる。

5. あとがき　以上，ここでは，水深変化と流れの両方による波の屈折の数値計算の手法を提案したが，3.で述べた 1)～3) の3種類の方法のいずれを用いるかを決定する基準については，単に定性的に述べたにすぎず，定量的に議論しえなかった。またこの手法を用いて，波の屈折に及ぼす流れの効果，とくに流速分布形状，radiation stress の効果などを議論するには至らなかった。これらは今後の課題である。なお，この研究に当り，とくに数値計算のプログラミングに関して，京都大学工学部土木工学教室の木村晃助手から有益な助言をいただいた。ここに記して謝意を表する。また，この研究は文部省科学研究費試験研究(1)（鳥取大学工学部野田英明教授代表）によったことおよび，数値計算はすべて京都大学大型計算センターによったことを付記する。

参考文献　1)例えば，Wilson, W. S., U.S. Army Coastal Eng. Res. Center, Tech. Memo. No.17, 1966, 2) Arthur, R.S., Trans. A.G.U., Vol. 31, pp. 549～552, 1950, 3) 岩垣雄一，水工水理学，第11章（石原藤次郎編），丸善，pp. 494～497, 1972, 4) Longuet-Higgins, M.S. and R.W. Stewart, Jour. Fluid Mech., Vol. 10, pp. 529～549, 1961.

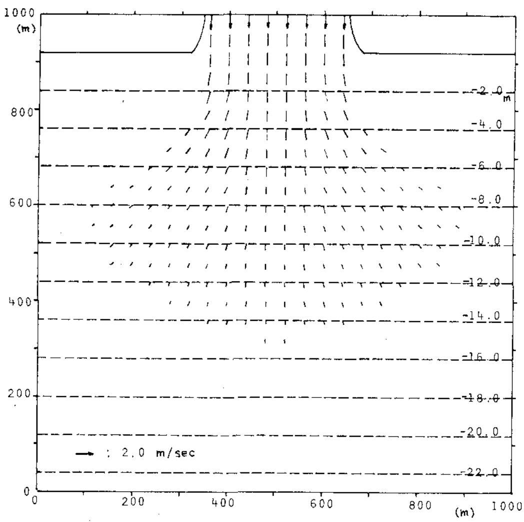


図-1　流速分布

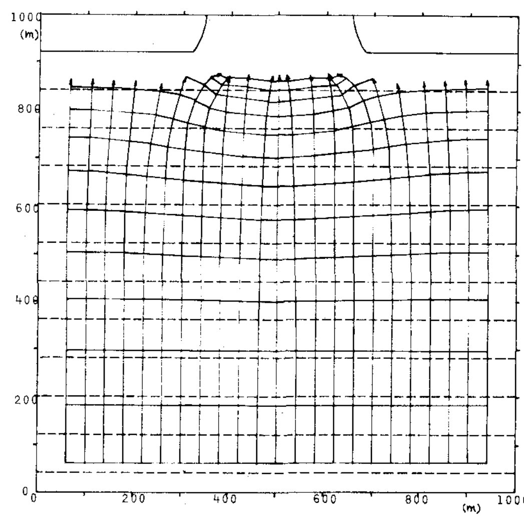


図-2　屈折図

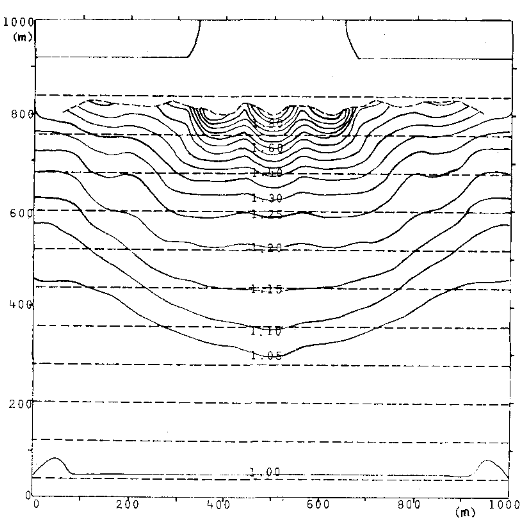


図-3　等波高比線図