I-314　　鉄筋コンクリート長方形断面の最適設計

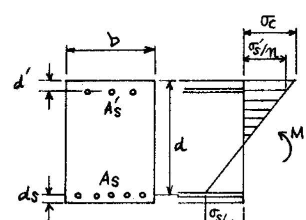
信州大学工学部　正員　長　尚

1. まえがき

現在鉄筋コンクリートはり断面の常用設計法は，許容応力度設計法である。その場合断面寸法に制限がなければ，コンクリートおよび鉄筋の最大応力度が，それぞれの許容応力度になるように，つまりつりあい断面になるように，有効高さ，鉄筋量などが定められるのが普通である。これはいわゆる fully stressed design ではあるが，最も経済的であるかどうかは疑問である。又諸外国で採用されている，終局強度設計法においては，鉄筋比の上下限値が規定されているだけであり，その上限値を用いれば鉄筋量が，許容応力度設計法に比べてかなり多くなり，不経済な設計となることが考えられる。そこで本文では，これら両設計法による，鉄筋コンクリート長方形断面の設計の問題を最適設計の問題として定式化し，これをモンテカルロ法およびラグランジュの未定乗数法により解き，実用的な結果が得られたので報告する。

2. 定式化および最適化計算

(1) 許容応力度設計法　　図－1に示す，曲げを受ける長方形断面について考える。この設計問題においては，予め与えられるものは一般にM，b，d'，d_s，σ_{ca}，σ_{sa} であり，求めるものはd，A_s，A_s'である。しかしここではd，A_s，A_s'をそのまま設計変数としないで，これらの代りに次に示すような，C，p，αを設計変数とする。$C=d/\sqrt{M/b}$，$p=A_s/(bd)$，$\alpha=A_s'/A_s$ ……(1)　このようにすれば後述の制約条件および目的関数が都合良く，Mおよびbの値に無関係となり，最適解がこれらM，bに無関係な係数として求められる。しかも通常用いられている単鉄筋のつりあい断面を求める係数C_1およびp_bと最適解の比較が容易にできる。コンクリートの最大応力度および鉄筋の応力度がそれぞれの許容応力度以下となる条件式は，式（1）で示した設計変数を用いて表わせば次のようになる。$\{k(1-k/3)+2n\alpha p(k-f)(1-f)/k\}C^2 \geqq 2/\sigma_{ca}$ ……(2)，$\{k/(1-k)\}\{k(1-k/3)+2n\alpha p(k-f)(1-f)/k\}C^2 \geqq 2n/\sigma_{sa}$ ……(3)　ここに，$k=\sqrt{n^2p^2(1+\alpha)^2+2np(1+\alpha f)}-np(1+\alpha)$，$f=d'/d$ ……(4)



図－1

である。以下fは常数として扱う。式（2），（3）がこの問題の制約条件である。次に鉄筋とコンクリートの材料費の比をqとすれば，単位長さ当りの材料費COSTは次のようになる。$\mathrm{COST}=\{1+f_s+(1+\alpha)pq\}C\sqrt{Mb}\,C_c$ ……(5)　ここに$f_s=d_s/d$（常数とする），C_c：コンクリートの材料費である。式(5)において$\sqrt{Mb}\,C_c$は常数として与えられるものであるから，COSTを最小にするためには次式を最小にすれば良いこととなり，これが目的関数である。$Z=\{1+f_s+(1+\alpha)pq\}C \longrightarrow min.$ ……(6)　式(2)，(3)，(6)で示される制約条件および目的関数は，設計変数C，p，αに関して非線形であるから，非線形計画問題である。ここでは，変数が比較的少なく，しかもCは式（2）もしくは（3）から逆算できるので，解法としてはモンテカルロ法を用いることとした。

(2) 終局強度設計法　　設計基準はACI 318－71[1]によるものとする。最適解は単鉄筋となることが予想されるので，以下単鉄筋の場合について考える。設計変数は許容応力度設計法の場合と同じように次のC，αとする。$C=d/\sqrt{M_u/b}$，$p=A_s/(bd)$ ……(7)　制約条件は次のようになる。$0.75p_b \geqq p \geqq 14.06/\sigma_{sy}$ ……(8)，$C=1/\sqrt{0.9\sigma_{sy}\{1-p\sigma_{sy}/(1.7\sigma_c')\}}$ ……(9)　ここに，$p_b=0.85\beta_1(\sigma_c'/\sigma_{sy})\{6300/(6300+\sigma_{sy})\}$ ……(10)，σ_c'：コンクリートの円柱供試体の強度（kg/cm²），σ_{sy}：鉄筋の降伏点（kg/cm²）

である。目的関数は式(6)を参照して，$Z=(1+f_s+pq)C \rightarrow min$ ……(10)となる。この場合も非線形計画問題であり，式(9)が等式条件であり，式(8)は普通満足されるので，ラグランジュの未定乗数法により解く。すなわち，ラグランジュ関数を$\phi = (1+f_s+pq)C - \lambda[0.9C^2 p \sigma_{sy}\{1-p\sigma_{sy}/(1.7\sigma_c')\}-1]$ ……(11)と定義し，$\partial\phi/\partial p=0$，$\partial\phi/\partial C=0$より$p_{opt}$を求め，それを式(9)に代入して$C_{opt}$を求める。なおこの$p_{opt}$が式(8)の条件を満たさない場合はそれぞれの限界値をp_{opt}とする。

3. 結果と考察

(1) 許容応力度設計法　種々なq，σ_{ca}，σ_{sa}のケースについて計算した結果を表−1，2に示す。なお，f_sの変化は結果に大きな影響を及ぼさないので，$f_s=0.15$の場合についてのみ示した。d，A_s，C，pの最適値をそれぞれd_{opt}，A_{sopt}，C_{opt}，p_{opt}とすれば，これらは表−1，2を利用して次式から求められる。$d_{opt}=C_{opt}\sqrt{M/b}$，$A_{sopt}=p_{opt}\cdot b\cdot d_{opt}$ ……(12)，$C_{opt}=C^{l}_{opt}$（$C_1<C^{l}_{opt}$のとき），C_1（$C^{l}_{opt}\leqq C_1\leqq C^{u}_{opt}$のとき），$C^{u}_{opt}$（$C_1>C^{u}_{opt}$のとき）……(13)，$p_{opt}=p^{u}_{opt}$（$C_{opt}=C^{l}_{opt}$のとき），$p_0$（$C_{opt}=C_1$のとき），$p^{l}_{opt}$（$C_{opt}=C^{u}_{opt}$のとき）……(14) ここに，$C_1=\sqrt{2/\{\sigma_{ca}k_0(1-k_0/3)\}}$，$p_0=k_0\sigma_{ca}/(2\sigma_{sa})$，$k_0=n\sigma_{ca}/(n\sigma_{ca}+\sigma_{sa})$ ——(15)である。これらの結果から主に次のことがいえる。① 最適断面は通常単鉄筋である。② 最適断面はつりあい断面と一致する場合が多い。③ qが大きく，σ_{ca}が高く，σ_{sa}が低い場合には，最適有効高さd_{opt}はつりあい断面のd_{min}より大きくなり，p_{opt}はp_0より小さくなる。なおこの場合，これらの最適値は$\sigma_c\leqq\sigma_{ca}$であれば，σ_{ca}に無関係な一定値となる。又p_{opt}はσ_{sa}にも無関係な一定値となる。④ qが小さく，σ_{ca}が低く，σ_{sa}が高い場合には，$d_{opt}<d_{min}$，$p_{opt}>p_0$となることがある。なおこの場合，これらの最適値は，$\sigma_s\leqq\sigma_{sa}$であれば，σ_{sa}に無関係な一定値となる。又p_{opt}はσ_{ca}にも無関係な一定値となる。

表−1

σ_{sa} \ q		40	50	60	70	80	90	100	120	150	180
C^{l}_{opt}	1400	.188	.208	.226	.243	.258	.272	.286	.310	.344	.374
	1600		.195	.212	.227	.241	.255	.267	.290	.321	.349
	1800			.199	.214	.227	.240	.252	.273	.303	.330
	2000				.203	.216	.228	.239	.260	.287	.312
	2100					.210	.222	.233	.253	.281	.305
p_{opt}		.02501	.02005	.01679	.01444	.01269	.01130	.01020	.00855	.00689	.00577

表−2

σ_{ca} \ q		30	40	50
C^{u}_{opt}	60	.318	.331	.342
	70	.295		
	80	.276		
p^{l}_{opt}		.00756	.00598	.00500

(2) 終局強度設計法　ラグランジュの未定乗数法により解いた結果は次のようになる。$p_{opt}=0.85\sigma_c'(1+f_s)/\{(1+f_s)\sigma_{sy}+0.85\sigma_c' q\}$ ……(16)，$C_{opt}=1/[0.9p_{opt}\sigma_{sy}\{1-p_{opt}\sigma_{sy}/(1.7\sigma_c')\}]$ ……(17)，$d_{opt}=C_{opt}\sqrt{M_u/b}$ ……(18)　種々なq，σ_c'，σ_{sy}のケースについて計算した結果次のことがいえる。① 最適鉄筋比は，その上限値より一般にかなり小さい。② 鉄筋比にその上限値を用いた場合に比べ，最適解を用いた場合は20%前後経済的となる場合が多い。③念のためモンテカルロ法で複鉄筋を含む式で解いたが，$q>30$の場合すべて単鉄筋となった。

(3) 両設計法の比較

表−3に両設計法による最適解の比較の例を示す。ここにν_p，ν_c，ν_zはそれぞれ，p，C，Zの終局強度設計法による最適解の許容応力度設計法によるそれに対する比である。ただし終局強度設計法の荷重係数Uは，$U=1.4D+1.7L$で，$L/D=0.25\sim4$では$M_u \fallingdotseq 1.245M$となるから，終局強度設計法の$C_{opt}$，$Z_{opt}$は1.245倍して比較してある。このような比較から，一般に終局強度設計法の方が鉄筋比は大きいが，鉄筋比の上限値を用いる場合に比べて，両者の差は小さくなり，特にqが大きくなると両者の差は非常に小さくなることがわかる。

表−3

kg/cm^2	q	30	50	70	100	150
$\sigma_{ca}=80$	ν_p	2.29	1.61	1.24	.96	1.0
$\sigma_{sa}=1600$, $\sigma_c'=240$	ν_c	.65	.75	.84	.94	.92
$\sigma_{sy}=3000$	ν_z	.83	.89	.92	.92	.92
$\sigma_{ca}=130$	ν_p	1.77	1.21	.92	.99	1.02
$\sigma_{sa}=2100$, $\sigma_c'=400$	ν_c	.71	.84	.94	.91	.90
$\sigma_{sy}=4000$	ν_z	.87	.91	.91	.91	.91

参考文献　1) ACI Standard 318−71