I -305　最適無次元構造解析について

熊本大学　工学部　正員　三池亮次
同　上　学生員　○丸内　進
松尾橋梁 K.K.　正員　下田幸義

1．はじめに

ある制約条件の下に、目的関数の極値を求める最適設計の手法を各種構造設計に応用する研究が現在盛んに行なわれている。その多くは、次元をもった荷重の下で、状態変数と許容状態変数の大小関係を主たる制約条件として次元をもった設計変数の最適値を求めるものであり、そして、より効率的で精度の高い数学的プログラミングを探索することが研究の主テーマであった。

一方、筆者らは、もっぱら構造模型実験に用いられている相似則を構造設計に応用する研究を積み重ねてきた。物理的に意義のある形状，材質，荷重および状態変数の無次元数で表現された構造解析の基礎式は、相似則そのものを明確に規定するものであって、相似ないし疑似相似の構造の力学的特性は、これによって容易に考察、判断されることになる。物理的に意義のある無次元数をパラメーターとした最適無次元構造解析を試みることは、構造設計の可能性を追究する上からも興味あることと考えられる。

2．トラスの無次元構造解析

骨組構造解析における無次元剛性マトリックス $\mathbb{K}^*$ は代表部材の細長比 λ_0，剛比 K，代表部材に対する任意部材の断面積 A，長さ ℓ の比 $k_A=A/A_0$，$k_\ell=\ell/\ell_0$，ヤング率 E の比 $k_E=E/E_0$ およびポアソン比 ν によって構成され、この形状無次元数に対応する変位 u，回転変位 ϕ の無次元数は $u^*=(E_0A_0/P_0)(u/\ell_0)$，$\phi^*=(E_0A_0/P_0)\phi$ を要素とする変位の無次元数 $\mathbb{d}^*$ であり、また、外力の代表値 P_0 として、外力 P の無次元数 $P^*=P/P_0$，モーメント M の無次元数 $M^*=M/P_0\ell_0$ を要素とする無次元荷重 $\mathbb{P}^*$ であって、$\mathbb{d}^*$ は $\mathbb{T}$ を変換マトリックスとして、

$$\underbrace{\mathbb{d}^*}_{\text{変位の無次元数}}=\mathbb{f}_d\{\underbrace{\lambda_0,K,k_\ell,k_A}_{\text{形状無次元数}},\underbrace{\nu,k_E}_{\text{材質無次元数}},\mathbb{T}\}\underbrace{\mathbb{P}^*}_{\text{外力比}} \tag{1}$$

同様に応力 σ の無次元数 $\sigma^*=\sigma A_0/P_0$ として、その無次元ベクトルは

$$\underbrace{\sigma^*}_{\text{応力の無次元数}}=\mathbb{f}_\sigma\{\underbrace{\lambda_0,K,k_\ell,k_A}_{\text{形状無次元数}},\underbrace{\nu,k_E}_{\text{材質無次元数}},\mathbb{T}\}\underbrace{\mathbb{P}^*}_{\text{外力比}} \tag{2}$$

で与えられる。上式は、形状，材質および荷重が相似の2つの構造に対して、無次元状態変数 $\mathbb{d}^*$，σ^* が等しいこと、すなわち、相似則そのものを意味する。

さて、形状，材質は相似であるが、外力 $\mathbb{P}^*$ を緩和する疑似相似構造を考える。すなわち、骨組構造に作用する死荷重を $\mathbb{P}_D$，活荷重を $\mathbb{P}_L$，骨組部材の単位重量を w，その代表値を w_0，死荷重の代表値を $P_{D0}=w_0A_0\ell_0$ として死活荷重の合力 $\mathbb{P}$ を P_{D0} で除して合力の無次元数を $\mathbb{P}^*$，死荷重無次元数を $\mathbb{P}_D^*=\mathbb{P}_D/P_{D0}$ とすれば、

$$\mathbb{P}^*=\frac{1}{P_{D0}}(\mathbb{P}_D+\mathbb{P}_L)=\mathbb{P}_D^*+\frac{\mathbb{P}_L}{w_0A_0\ell_0} \tag{3}$$

$\mathbb{P}_D^*$ の要素 P_D^* は、$\mathbb{P}_D$ の要素 $P_D=\sum k\cdot wA\ell$ と P_{D0} の比であり、$k_w=w/w_0$ として、$P_D^*=\sum k\cdot k_wk_Ak_\ell$ であるから相似の構造では、スパン L に関係なく P_D^* は定数となり、式(2)より、$\sigma_D^*=\sigma_DA_0/P_0=\sigma_D/w_0\ell_0$ もまた定数である。

したがって、死荷重による応力 σ_D は

$$\sigma_D=\sigma_D^*w_0(\ell_0/L)L \tag{4}$$

であり、部材単位重量 w_o とスパンLに比例するが、断面積には関係しない。式(3)の右辺第2項は活荷重の無次元数 P_L^* である。その代表値を P_{Lo} として

$$P_L^* = \frac{P_L}{w_o A_o l_o} = \frac{P_{Lo}}{w_o A_o l_o} \frac{P_L}{P_{Lo}} \tag{5}$$

したがって、活荷重が相似で P_L/P_{Lo} の要素 $P_L^* = P_L/P_{Lo}$ が定数の場合、式(5)を式(2)に代入して、$\sigma_L^* \propto P_{Lo}/w_o A_o l_o$ であるが、式(4)と同様 $\sigma_L \propto \sigma_L^* w_o l_o$ であるから

$$\sigma_L \propto \frac{P_{Lo}}{L^2} \frac{L^2}{A_o} \tag{6}$$

で、活荷重が一定の場合の相似構造に対して σ_L は L^2 に逆比例し、w_o に影響されない。すなわち、構造を相似に保つ場合、あるスパンにおいて応力が最小となり、また、そのスパンよりLを拡大する場合、死荷重応力 σ_D が顕著となり、ついには許容応力を超えることになる。

3．最適無次元構造解析

2．において、材質と形状は相似であることを前提としたが、次には、死活荷重応力 σ が $\sigma_a \geqq \sigma$（σ_a は許容応力）の下で σ_a に接近するようなスパンL，断面積 A_o，形状無次元数 k_A を求めることを考える。これは、明らかに無次元数を設計変数とする最適設計の問題である。その目的関数 y は最小重量設計に従うとき

$$y = w_o A_o l_o \left\{ 1 + \sum k_W k_A k_l \right\} \tag{7}$$

であり、$P_o = w_o A_o l_o$ であるから、次式

$$\sigma_a - w_o(l_o/L) \cdot L \cdot \sigma^* \geqq 0 \tag{8}$$

が、無次元化された応力に関する制約条件となる。ここで、筆者らは、代表部材の断面積 A_o のみを設計変数として最適断面積 A_o とスパンLの関係を調べた。式(3)において k_E, k_A, k_l を一定とすると、P_D^* は一定となり、代表部材の断面積 A_o は P_L^* のみに含まれる。したがって、$\Delta A_o \ll A_o$ とすると ΔP_L^* は式(5)より

$$\Delta P_L^* = -\frac{P_L}{w_o A_o l_o} \frac{\Delta A_o}{A_o} \tag{9}$$

$$\therefore\ \Delta d^* = K^{*-1} \Delta P^* = K^{*-1} \Delta P_L^* = -K^{*-1} \frac{P_L}{w_o A_o (l_o/L) L} \frac{\Delta A_o}{A_o} \tag{10}$$

ここで、(i, j) 部材の応力，無次元応力をそれぞれ σ_{ij}，σ_{ij}^* とすると

$$\sigma_{ij}^* = \frac{\sigma_{ij} A_o}{P_o} = \left(\frac{k_E}{k_l}\right)_{ij} [-1,\ 1]\ d_{ij}^* \tag{11}$$

$$\therefore\ \Delta \sigma_{ij}^* = \left(\frac{k_E}{k_l}\right)_{ij} [-1, 1]\ \Delta d_{ij}^* = \left(\frac{k_E}{k_l}\right)_{ij} [-1, 1]\ T_{ij} \frac{(K^{*-1})_{ij} P_L}{w_o A_o (l_o/L) L} \frac{\Delta A_o}{A_o} \tag{12}$$

したがって、制約条件式

$$\sigma_a - w_o\left(\frac{l_o}{L}\right) L \left\{ \sigma_{ij}^* - \left(\frac{k_E}{k_l}\right)_{ij} [-1, 1]\ T_{ij} \frac{(K^{*-1})_{ij} P_L}{w_o A_o (l_o/L) L} \frac{\Delta A_o}{A_o} \right\} \geqq 0 \tag{13}$$

を満足して

$$y = w_o\left(\frac{l_o}{L}\right) L \left(1 + \sum k_W k_A k_l\right)(A_o + \Delta A_o) \tag{14}$$

を最小にする ΔA_o を求めれば、代表部材の最適断面積 A_o とスパンLの関係を得る。

具体的計算例は、講演時に報告する。