I-304 1修正シンプレックス法に関する研究

熊本大学工学部	正員	三池亮次
同上	学生員	○吉本俊裕
富士通FACOM	正員	沢村泰伸

1. はじめに

いわゆる標準形シンプレックス法の制約条件式は，構造変数 $x>0$ に対して，その許容領域が原点 $x=0$ を含むものであり，これに対して原点が実行可能域の外にある場合，すなわち $x\neq 0$ なる上下限をもつシンプレックス解法も，すでに種々考案されている。

ここでは，上限および下限を示す制約条件が同時に存在し，かつ構造変数 x が正負の何れであってもよい場合の1線形シンプレックス解法について検討したものであり，最適構造設計の問題に応用して有効と考えられる。

2. シンプレックス法のマトリックス解

構造変数 x に関する線形目的関数

$$y=C^{(t)}x \tag{1}$$

を，スラック変数 λ に対して，制約条件式

$$Ax\leqq S \quad \text{あるいは} \quad Ax+I\lambda=S \tag{2}$$

の下に最大とする問題を考える。ここに S は基底解で標準形では $S\geqq 0$ であるが，非標準形では (2) 式の不等号の向きが逆となり，S は負値を含むことになる。S, x, λ のおのおのを2組に分解し，これをマトリックスで表示すれば，

$$\begin{bmatrix}0\\S\\S'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&-C^{(t)}&-C'^{(t)}\\0&I&0&A_1&A_1'\\0&0&I&A_2&A_2'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\\lambda\\\lambda'\\x\\x'\end{bmatrix} \tag{3}$$

で与えられるシンプレックス表を得る。ここに A_2' は正方マトリックスとし，A_2' をピボットとして掃き出し計算を実行すれば，(3) 式は，

$$\begin{bmatrix}C'^{(t)}A_2'^{-1}S'\\S-A_1'A_2'^{-1}S'\\A_2'^{-1}S'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&C'^{(t)}A_2'^{-1}&(C'^{(t)}A_2'^{-1}A_2-C^{(t)})&0\\0&I&-A_1'A_2'^{-1}&(A_1-A_1'A_2'^{-1}A_2)&0\\0&0&A_2'^{-1}&A_2'^{-1}A_2&I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\\lambda\\\lambda'\\x\\x'\end{bmatrix} \tag{4}$$

となる。この掃き出し計算の結果，新たな基底変数として x' が組み込まれ，λ' は基底変数より追い出される。(4) の第1式左辺は，$x=0$ および $\lambda=0$ の超平面群が交差する端点の y の値であり，(4) の第2，3式の左辺は基底解で，$\lambda=S-A_1'A_2'^{-1}S'$，$x'=A_2'^{-1}S'$ である。この端点が実行可能域にあるための条件は，$x'=x'$，$S=s'$，$A_2'=a_2'$，$A_1'^{(t)}=[a_{1i}', a_{2i}', \cdots, a_{ir}']$，$S^{(t)}=[s_1, s_2, \cdots, s_r]$ として，

$$① \quad x'=\frac{s'}{a_2'}=\theta_0\geqq 0 \qquad ② \quad \lambda=\begin{bmatrix}s_1\\\vdots\\s_j\\\vdots\\s_r\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}a_{1i}'\\ \vdots \\a_{ji}'\\ \vdots \\a_{ir}'\end{bmatrix}\theta_0>0 \tag{5}$$

これより，$\theta_0 \geqq 0$ に対して $\lambda > 0$ の条件は，

(a) $S_j \geqq 0$ で $a_{ij}' > 0$ であるとき $\theta_j > \theta_0 \geqq 0$ で θ_0 は $S_j \geqq 0$ の θ_j の最小値より小さいこと。

(a)' $S_j \geqq 0$ で $a_{ij}' < 0$ であるとき $\theta_j < 0$ であるが，$\lambda > 0$ で無条件に実行域に入る。（標準形）

(b) $S_j < 0$ で $a_{ij}' > 0$ であるとき $\theta_j < 0$ で $\lambda < 0$ で非実行域に入る。

(b)' $S_j < 0$ で $a_{ij}' < 0$ であるとき $\theta_0 > \theta_j \geqq 0$ で θ_0 は $S_j < 0$ の θ_j の最大値より大きいこと。（非標準形）

したがって，$S_j > 0$ である正の θ_j の最小値を θ_{min}，$S_j < 0$ である正の θ_j（これを θ_j' と表わす）の最大値を θ'_{max} として，$\theta_{min} > \theta_0 > \theta'_{max} \geqq 0$ が，$\lambda > 0$ の条件となる。

3. 修正シンプレックス法

非標準形で，基底解に負値が含まれる場合の解法として，罰金法による方法および第2段階法がある。後者は基底解が負値をとる変数の和をとり，これを一時的な目的関数として最大化の操作を行ない，基底解に負値が消えてから本来の目的関数について最適解を得る方法である。

ここでは，さらにスラック変数 $\lambda > 0$ であるが，構造変数 x は正負の何れであってもよい場合を取り扱うが，$\theta_0 \geqq 0$ である，前記 (a)～(b)' の条件に加えるに，$\theta_0 < 0$ の場合の $\lambda > 0$ の条件は，

(c) $S_j > 0$ で $a_{ij}' > 0$ であれば，$\theta_j > 0 > \theta_0$ で，無条件に $\lambda > 0$

(c)' $S_j > 0$ で $a_{ij}' < 0$ であれば，$\theta_j < \theta_0 < 0$ で，θ_0 は θ_j の最大値より大きいこと。

(d) $S_j < 0$ で $a_{ij}' > 0$ であれば，$0 > \theta_j > \theta_0$ で，θ_0 は θ_j の最小値より小さいこと。

(d)' $S_j < 0$ で $a_{ij}' < 0$ であれば，$\theta_j > 0$ となり，$\lambda < 0$ で非実行域に入る。

したがって，$S_j > 0$ である負の θ_j の最大値を θ_{max}，$S_j < 0$ である負の θ_j' の最小値を θ'_{min} とするとき，$0 > \theta'_{min} > \theta_0 > \theta_{max}$ が $\lambda > 0$ の条件となる。

x が正負の何れであってもよい場合の最適解は，制約条件式が決定する超平面の端点において生ずるから，最初に構造変数 x のすべてを基底変数に組み込む操作を行なう。標準形ではシンプレックス表における負の最小値の係数をもつ構造変数 x を基底変数に組み入れるが，この場合は，x の係数の正負に関係なく，条件 (a) または (c)' によって，スラック基底変数の $|\theta_j|$ の最小値を θ_0 とすれば，スラック基底変数が正から負に転ずることはない。シンプレックス表における x の係数が負の場合は $\theta_j > 0$ の最小値を，正の場合は $\theta_j < 0$ の最大値を θ_0 とすれば，目的関数の最大値への収斂は早くなる。

x を基底変数に組み入れて後，スラック変数のみに着目して，標準形シンプレックスの手法に従い，順次，目的関数を最大とする端点を追究する。この場合のピボットは構造変数ではないが，(3)式において λ，λ' を基底変数，x，x' を非基底変数とし，構造変数はすでに基底変数に組み入れられているものと考えれば，条件 (a)～(d)' は，そのまま適用されることは言うまでもない。

x を基底変数に組み入れて後，なおスラック変数の一部に負値を含む場合には，これらの和を一時的目的関数として第2段階法に従い標準形に変換することは，前記と同様である。

シンプレックス表における目的関数行のすべてのスラック変数の係数が正に転ずるとき，目的関数 y の最大値を得る。

具体的計算例は，講演時に報告する。

参考文献

1) 渡辺浩，経営数学・C-12，リニヤ・プログラミング，みすず書房，1958
2) 関英男，情報工学ハンドブック，森北出版，1973
3) 情報数学ハンドブック
4) 佐治信男，白根礼吉，横井満，大前義次，オペレーションリサーチ理論と実際，培風館，昭和45年
5) 坂口実，数理計画法，培風館
6) 中山伊知郎 編，現代統計大辞典，東洋経済新報社