

名古屋工業大学 正員 〇松 浦 聖
 名古屋工業大学大学院 学生員 川 崎 恭 史

1. まえがき 本研究の最適設計は、2次元的な構造の最小体積設計(材料が均質であると最小重量設計)に因りて、最適化の手法として近時一般的によく用いられている数値計画の手法を用いず、ミッCHELの連続体構造(Michell's structural continua)の理論を用いて解析している。そうした解析法を考察し、与えられたある荷重を支えることができる最適構造の形式と、その最小材料体積を求めることが目的である。ミッCHELの連続体構造の理論は、ミッCHELの十分条件と塑性力学における剪断線場の解析の理論を用いて導かれていた。ミッCHEL構造とは、設計の対象となる構造に課せられた領域制限荷重条件などの条件を満足し、ミッCHELの十分条件を満足する最小材料体積の構造のことであり、直交系をなす剪断線に沿って一定の厚さ分布を持つ連続体を形づくる。¹⁾ この設計法は板形式の構造として、また理論的發展をさせた骨組形式の構造としても考えることができるが、その構造は形式の複雑性などの点からも問題はあつたが、構造物を設計する場合の新しい構造形式と最小材料体積の一つの目安となると考えられよう。

2. ミッCHELの連続体構造の理論 1)ミッCHELの十分条件 “与荷重を支えることができる構造において、種々の条件を満足し、引張り部材、圧縮部材の応力が、それぞれ降伏応力 $\sigma_t, -\sigma_c$ に達している時、引張り部材、圧縮部材の主歪が、それぞれ $\sigma_t/\sigma_t, -\sigma_c/\sigma_c$ に等しい構造が最小材料体積となる最適構造である。ただし σ_t, σ_c は正の定数である。” このことは次ぎのようにして判る。仮想仕事の原理より次式が成り立つ。

$$W = \sum T \delta l \dots \dots (1) \quad \text{こゝに } W; \text{仮想仕事, } T; \text{部材力, } \delta; \text{仮想歪, } l; \text{部材長}$$

$$\text{ミッCHEL構造に対し } \begin{cases} T \delta = (\sigma_t A) (\sigma_t / \sigma_t) = \sigma_t \epsilon A, & (\text{引張り部材について}) \\ T \delta = (-\sigma_c A) (-\sigma_c / \sigma_c) = \sigma_c \epsilon A, & (\text{圧縮部材について}) \end{cases} \quad \begin{matrix} A; \text{部材断面積} \\ \text{左式を式(1)に代入すると} \end{matrix}$$

$$W = \sigma_t \sum A l = \sigma_t V_m \dots \dots (2) \quad V_m; \text{ミッCHEL構造の材料体積, } \text{与荷重を支えることができる他のどんな構造に対しても}$$

$$\begin{cases} T \delta \leq T (\sigma_t / \sigma_t) \leq \sigma_t \epsilon A, & (\text{引張り部材について}) \\ T \delta \leq (-T) (-\sigma_c / \sigma_c) \leq \sigma_c \epsilon A, & (\text{圧縮部材について}) \end{cases}$$

$$\text{従つて式(1)より, } W \leq \sigma_t \sum A l = \sigma_t V \dots \dots (3) \quad V; \text{他の構造の材料体積, 式(1)と式(3)を比較すると, } V_m \leq V \dots \dots (4) \quad \text{が成立し, ミッCHEL構造が最小材料体積となることが判る。また式(2)より, } V_m = W / \sigma_t \dots \dots (5)$$

以上は骨組形式の構造に対する理論であるが、板形式の構造に対しても適用することが可能である。

2)剪断線に沿って主歪 $\sigma_t/\sigma_t, -\sigma_c/\sigma_c$ を持つ2次元剪断線場の解析

図-1に示す直交曲線座標(α, β)を用いると、線素 ds は次式で表わされる。

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2 \quad \text{ただし, } A, B \text{ は } \alpha, \beta \text{ の関数。}$$

α 線、 β 線方向の歪をそれぞれ $\sigma_t/\sigma_t, -\sigma_c/\sigma_c$ とし、点(α, β)における α, β 方向の変位をそれぞれ u, v とすると、次の関係が導かれる。

$$x + iy = x_0 + iy_0 + \int_{(\alpha_0, \beta_0)}^{(\alpha, \beta)} e^{i\phi} (A d\alpha + B d\beta) \dots \dots (6)$$

$$u + iv = e^{i(\phi - \phi_0)} (u_0 + iv_0) + e^{-i\phi} \left\{ \sigma_t \left(\frac{A d\alpha}{\sigma_t} - i \frac{B d\beta}{\sigma_c} \right) + iW (A d\alpha + B d\beta) \right\} \dots \dots (7)$$

$$W = W_0 + \sigma_t \left(\frac{1}{\sigma_t} + \frac{1}{\sigma_c} \right) \int_{(\alpha_0, \beta_0)}^{(\alpha, \beta)} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right) d\alpha - \left(\frac{\partial \phi}{\partial \beta} \right) d\beta \right\} \dots \dots (8)$$

こゝで ϕ は β 線の接線と x 軸とがなす角である。式(6)(7)(8)の一条件より、次式のようなハンキーの第1定理が成立する。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha \partial \beta} = 0, \quad \phi(\alpha_1, \beta_0) - \phi(\alpha_0, \beta_0) = \phi(\alpha_1, \beta_1) - \phi(\alpha_0, \beta_1) \dots \dots (9)$$

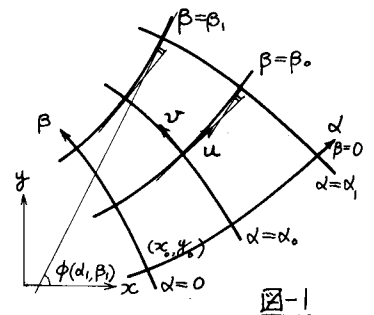


図-1

α, β 線が曲線の場合座標 α, β を次式で定義する。 $\phi = \phi_0 - \alpha d + b\beta \dots\dots (10)$ $a, b = +1$ か -1
 この時A, Bは $\frac{\partial A}{\partial \beta} = aB, \frac{\partial B}{\partial \alpha} = bA \dots\dots (11)$ を満足しなければならない。

3) 平衡条件 α 線 β 線に沿って引張り部材圧縮部材を挿入すればミッチェル構造が得られる。単位中当りの部材厚をそれぞれ t_1, t_2 とすると $d\alpha, d\beta$ 当りの部材力は、それぞれ $T_1 = \sigma_c B t_1, T_2 = -\sigma_c A t_2$ である。

平衡条件; $\frac{\partial T_1}{\partial \alpha} - T_2 \frac{\partial \phi}{\partial \beta} = 0, \frac{\partial T_2}{\partial \beta} + T_1 \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} = 0 \dots\dots (12)$ 物体力が働かない場合

境界条件; $T_1 = P \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + F_\alpha B, \frac{\partial P}{\partial \beta} = F_\beta B$
 $T_2 = T \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + F_\alpha A, \frac{\partial T}{\partial \alpha} = -F_\alpha A$ } $\dots\dots (13)$ P ; 圧縮荷重, T ; 引張荷重
 F_α, F_β ; α, β 方向の分布荷重

部材が挿入された時の全厚 t は次式で示される。 $t = t_1 + t_2 = \frac{T_1}{\sigma_c B} - \frac{T_2}{\sigma_c A} \dots\dots (14)$

以上の理論から最適解を求めるのであるが、その解析手順の概略を述べれば、まず式(11)を満足するA, Bを境界条件(13)を用いて解くことが向題となる。A, Bが求まれば剪断線場の形状剪断線に沿う厚さ分布変形が式(6)(7)より計算することができ、式(5)より材料体積が求まり、ミッチェル構造が示されることになる。

3.1 応用例 i) 図-2のような同心円と直線から成る剪断線はヘンキーの第一定理を満足する。

極座標を用いて、 $\alpha = r, \beta = \theta$ とすると、 $\phi = \theta, A = 1, B = r$ である。

$u_0 = v_0 = w_0 = 0$ とすると、式(7)(8)より、

$w = -\sigma_c \epsilon \theta (\frac{1}{\sigma_c} + \frac{1}{\sigma_c}) \dots\dots (15)$

$u_r + u_\theta = u + i v = \left\{ \frac{\sigma_c \epsilon}{\sigma_c} - i \sigma_c \epsilon \theta (\frac{1}{\sigma_c} + \frac{1}{\sigma_c}) \right\} r$, 従って

$u_r = (\frac{\sigma_c \epsilon}{\sigma_c}) r, u_\theta = -\sigma_c \epsilon \theta (\frac{1}{\sigma_c} + \frac{1}{\sigma_c}) r \dots\dots (16)$

式(15)(16)は全平面に対して変形の連続性を満足しないことより、半平面に構造が占めるべき領域の制限を受けるミッチェル構造の設計に通用できる。この構造は力

Fを伝える半径 $r=l$, 断面積 F/σ_c である境界部材が必要である。また半円はある厚さ分布を持つ板となっている。式(13)より、 $(T_1)_{r=l} = P = F, \frac{\partial P}{\partial \beta} = 0$, 従って $P = F$ (一定); 式(12)より、 $(T_2)_{r=l} = 0, \frac{\partial T_2}{\partial \beta} = 0$, 従って $T_2 = 0, t_2 = 0$; $\frac{\partial T_1}{\partial \alpha} = 0$, 従って $T_1 = F$ (一定), $t_1 = F/\sigma_c r$

以上より全厚 t は、 $t = t_1 + t_2 = F/\sigma_c r$, これより全厚 t は r 方向に沿う厚さ分布を持つことが判る。 V_m は
 $V_m = (F/\sigma_c) \pi l + \int_0^\pi \int_0^l \frac{F}{\sigma_c r} r dr d\theta = \pi l F (\frac{1}{\sigma_c} + \frac{1}{\sigma_c})$, 式(5)(16)より求める最適構造の最小材料体積は、
 $W = 2F \times 0 - 2 \times F \left\{ -\sigma_c \epsilon \cdot \frac{\pi}{2} (\frac{1}{\sigma_c} + \frac{1}{\sigma_c}) l \right\} = \pi l F (\frac{1}{\sigma_c} + \frac{1}{\sigma_c}) \sigma_c \epsilon, V_m = \frac{W}{\sigma_c} = \pi l F (\frac{1}{\sigma_c} + \frac{1}{\sigma_c}) \dots\dots (17)$

3.2 応用例 ii) i)で示した例に対して、領域の制限を受けないミッチェル構造は図-3のように4つの領域を

組み合わせた剪断線場より得られる。領域ACC'における変位 u, v 回転 w は式(15)(16)により与えられ、領域ADD'においては対称性より得られる領域ACBD

の変形は図の x, y 軸上における変形の連続性を満足することより、式(7)から

$u_x = \frac{\sigma_c \epsilon}{\sigma_c} x + \frac{\pi}{4} \sigma_c \epsilon (\frac{1}{\sigma_c} + \frac{1}{\sigma_c}) y, u_y = -\sigma_c \epsilon y - \frac{\pi}{4} \sigma_c \epsilon (\frac{1}{\sigma_c} + \frac{1}{\sigma_c}) x$ (18)

ここで u_x, u_y は x 軸 y 軸方向の変位である。この剪断場は図に示す荷重系を受ける構造の設計に適用できる。支承の座標 (x, y) は、 $x = l/\sqrt{2}, y = l/\sqrt{2}$ であり、支承の F 方向の変位は $(u_x - u_y)/\sqrt{2}$ である。従って式(5)より、

$V_m = 2F/\sigma_c \times (u_x - u_y)/\sqrt{2}$, 式(18)を代入、 $V_m = (1 + \frac{\pi}{2}) l F (\frac{1}{\sigma_c} + \frac{1}{\sigma_c}) \dots\dots (19)$

4. あとがき 最小重量設計法の1つの方法として、ミッチェル構造による解析法を考察し、2つの応用例を示した。この種の研究は現在ヘンプ教授の研究室で進められている²⁾この設計法は、一般的な荷重系への適用性や歪場に関連したその複雑性など基本的な諸問題があるが、一つの構造形式を考える手がかりとなるであろう。

- 1). W.S. Hemp; Optimum Structures, Oxford University Press, 1973
- 2). R.E. McConnel; Least-Weight Frameworks for Loads Across Span, A.S.C.E. EM5, October, 1974

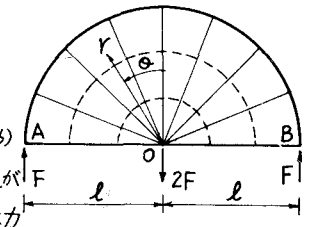


図-2

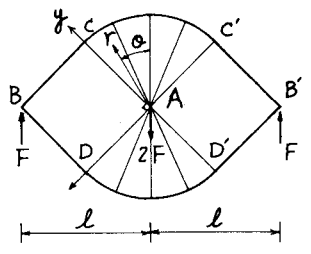


図-3