I-298　　不規則振動問題における *first-passage probability* について

大阪大学工学部　正員　　小松　定夫
広島工業大学　　正員　○　中山　隆弘

1. まえがき

地震、風、波などの不規則変動外力を受ける構造物の信頼度評価方法は、いまだ完全には確立されていない。ただ構造物の主要な点に生ずる応力が、強度を超過する確率すなわち first-passage probability P_f が1つの評価基準たり得ることは周知の通りであり[1] 構造物の応答過程と P_f の確率構造との関係に関する研究は現在も積極的に行なわれている。[2] しかし降伏点などに代表される材料強度は本質的にばらつきを有するものであり、その他種々の原因に基づく強度のばらつきまでをも考慮してはじめて、現に適った構造物の信頼度評価が可能になり、慣用の安全率によるよりも、より合理的な安全性評価が期待できる。そこで本研究では、まず応答が定常正規確率過程を示す場合の期待横断率の算定式を、強度を確率量として誘導し、具体的に数値計算を行なって、強度を決定量とする従来の研究結果と比較、検討した。またデータの不足あるいは繁雑さなどの原因により、全面的に確率論的構造設計法を採用しきれない現状を考えて、強度を決定量として扱うための1つの考え方を提示した。

2. 期待横断率の算定式

以下では応答を $\boldsymbol{x}(t)$ その導関数を $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ で表わす。また $\boldsymbol{x}(t)$ および $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ の分散をそれぞれ $K_{xx}(t)$, $K_{\dot{x}\dot{x}}(t)$、両者の相関関数を $P_{x\dot{x}}(t)$ とする。さらに強度を $\mathbf{a}$ で表わし、応答および強度は正負領域で対称であるとして、正の領域におけるクロッシング現象についてのみ考える。なお太文字は変数が確率量であることを示す。

さて応答が定常正規確率過程を示す場合は、上記の応答関係諸量および期待横断率は時間に無関係である。また $\boldsymbol{x}(t)$ の期待値をゼロとすれば、$\boldsymbol{x}(t)$ と $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ は互いに独立であって $P_{x\dot{x}}(t)=0$ である。したがって時刻 t で $\boldsymbol{x}(t)$ が a より小さく、時刻 $t+dt$ で a 以上になる確率は、S. O. Rice 氏[3]の式をそのまま用いて表わすことができる。

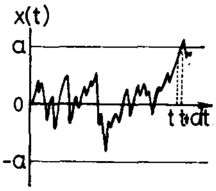

図1 応答が強度を超過する現象の概略図

$$P\{\boldsymbol{x}(t+dt)\geq a\cap\boldsymbol{x}(t)<a\}=\sqrt{K_{\dot{x}\dot{x}}}/(2\pi\sqrt{K_{xx}})\cdot\exp(-a^2/2K_{xx})\,dt \qquad (a)$$

1) 強度を条件付正規分布関数で与えられる確率量とした場合　強度の最小値あるいは最大値が何らかの理由で規定される場合を考える。* 最小値を $r_1=\bar{a}-\xi_1\sigma_a$ $(\xi_1\geq 0)$、最大値を $r_2=\bar{a}+\xi_2\sigma_a$ $(\xi_2\geq 0)$ とし、さらに強度が正規分布するとすれば、確率密度関数（以下 p.d.f. と略記する。）は、次式で示される。

$$f_a(a)=1/[\sqrt{2\pi}\,\sigma_a\{G(-\xi_1)-G(\xi_2)\}]\cdot\exp\{-(a-\bar{a})^2/2\sigma_a^2\} \qquad (b)$$

式中 $\bar{a}$, σ_a はそれぞれ $\mathbf{a}$ の平均値および標準偏差であり、$G(z)=1/\sqrt{2\pi}\cdot\int_z^\infty\exp(-y^2/2)\,dy$ である。したがって、強度が a と $a+da$ の間にあり、応答が $t+dt$ に a を超過する同時生起確率は、$\mathbf{a}$ と $\boldsymbol{x}(t)$ が互いに独立な確率変数であることから、式(a)と(b)により次のように表わせる。

$$P\{a\leq\mathbf{a}\leq a+da\cap\boldsymbol{x}(t+dt)\geq a\cap\boldsymbol{x}(t)<a\}=\sqrt{K_{\dot{x}\dot{x}}}/[(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{K_{xx}}\,\sigma_a\{G(-\xi_1)-G(\xi_2)\}]\cdot\exp\{-(a^2/2K_{xx})-(a-\bar{a})^2/2\sigma_a^2\}\,da\,dt \qquad (c)$$

式(c)を a について r_1 から r_2 まで積分し、dt で除することによって、強度が条件付正規分布する場合の期待横断率 ${}_s\nu_{CN}^+$ を求めることができる。紙面の都合上、結果のみを次に示す。

$$\boxed{{}_s\nu_{CN}^+=\frac{\sqrt{K_{\dot{x}\dot{x}}}}{2\pi\sqrt{1+m^2\delta_a^2}\sqrt{K_{xx}}}\,\frac{G(\beta_1)-G(\beta_2)}{G(-\xi_1)-G(\xi_2)}\exp\left\{-\frac{m^2}{2(1+m^2\delta_a^2)}\right\}} \qquad (1)$$

式中 $m=\bar{a}/\sqrt{K_{xx}}$, $\delta_a=\sigma_a/\bar{a}$, $\beta_i=\{m^2\delta_a+(-1)^i\xi_i(1+m^2\delta_a^2)\}/\sqrt{1+m^2\delta_a^2}$ $(i=1,2)$ である。

また ξ_1, ξ_2 を共に無限大にすれば強度が正規分布する場合の期待横断率 ${}_s\nu_N^+$ が得られる。

---

* 亀田・小池両氏[4]が非破壊効果と呼ぶ強度保障の考え方に基づけば、強度の最小値が与えられる。

$$ {}_s\nu_N^+ = \frac{\sqrt{K_{\dot x\dot x}}}{2\pi\sqrt{1+m^2\delta_a^2}\sqrt{K_{xx}}}\exp\left\{-\frac{m^2}{2(1+m^2\delta_a^2)}\right\} \qquad (2) $$

2) 強度を対数正規分布関数で与えられる確率量とした場合　例えば構造用鋼材の降伏点が対数正規分布をなすことはよく知られた事実である。[5] この場合 p.d.f. は次式で与えられる。

$$ f_a(a) = 1/(\sqrt{2\pi}\,\sigma_A a)\cdot\exp\{-(\ln a - m_A)^2/2\sigma_A^2\} \qquad (d) $$

式中 $\sigma_A=\sqrt{\ln(1+\delta_a^2)}$, $m_A=\ln\bar{a}-0.5\sigma_A^2$ である。1)と全く同様の方法によって、強度が対数正規分布する場合の期待横断率 ${}_s\nu_{LN}^+$ が、次式のように求まる。

$$ {}_s\nu_{LN}^+ = \frac{\sqrt{K_{\dot x\dot x}}}{2(2\pi)^{3/2}\sqrt{\ln(1+\delta_a^2)}\sqrt{K_{xx}}}\int_0^\infty \exp(-z)\frac{1}{z}\exp\left[-\frac{\{\ln\sqrt{2(1+\delta_a^2)z}-\ln m\}^2}{2\ln(1+\delta_a^2)}\right]dz \qquad (3) $$

[3] 数値計算結果および考察　応答過程が狭帯域であれば $K_{\dot x\dot x}=(2\pi f_0)^2K_{xx}$ の関係がある。この関係を用いて種々の m と δ_a に対する期待横断率を式(2),(3)に基づいて計算した。結果を図2に示す。ただし、期待振動数 f_0 は 1.0 Hz としている。図より強度を決定量とした場合の誤差は δ_a の値と共に増大し、その傾向は m が大きい程顕著になることが分かる。また分布型の影響も δ_a と m の増加と共に歴然としてくる。さて応答が強度を越える現象が Poisson 過程であるとの仮定は、m が4あるいは5と大きくなると比較的成立し易い。[6] そこで $m=4\sim6$ の場合に対してこの仮定を適用し、P_f を式 $P_f(t)=1-\exp(-2\nu^+t)$ に従って計算した。$t=10\,\mathrm{sec}$ のときの結果を図3に示す。m が5, 6の場合、P_f は強度のばらつきに著しく影響されている。次にばらつきを示す強度の中から代表値を決定する方法について、不規則外力に対する構造設計という立場から考えてみる。いま代表値が $a_c=\bar{a}-\alpha\sigma_a$ で与えられるとし、α を強度を確率量として計算した期待横断率と、決定量 a_c として算出した横断率とを等価に置くことによって決定する。α は当然 m と δ_a に関係する量で、図4に示す通りである。図中の k は代表値の平均値に対するパーセンテージを表わす。このダイアグラムを用いて、ばらつきを有する各種鋼材[6]の代表値を決定した1例を図5に示す。ばらつきが大きい場合程、代表値を低目にとるという我々の感覚にも一致するような結果が定量的に得られた。

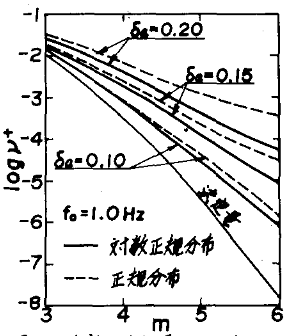

図2 強度を決定量とした場合と確率量とした場合の期待横断率の差異

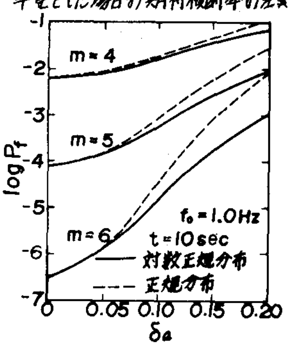

図3 強度を決定量とした場合と確率量とした場合の P_f の差異

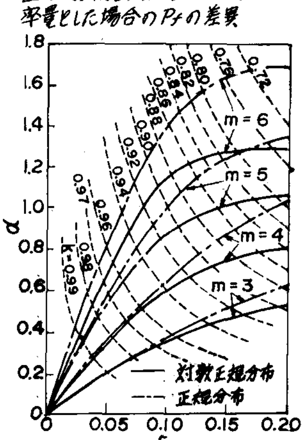

図4 強度の代表値を求めるためのダイアグラム

[4] あとがき　不規則変動外力を受ける構造物の安全性評価の1つの尺度である期待横断率および first-passage probability の値が強度のばらつきに強く影響され、その傾向が m の値を大きく設定する程著しいことを示した。また強度の代表値を決定するためのダイアグラムを、定常不規則外力に対する構造設計の見地から作成し、提示した。非定常外力に対する結果は、稿を改めて報告したい。

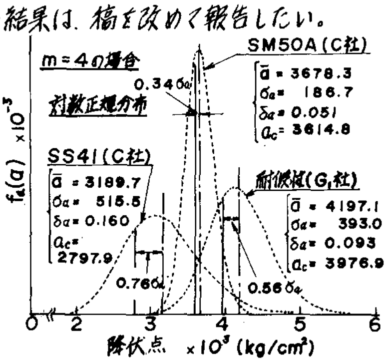

図5 強度の代表値

〈参考文献〉 1) 例えば小松定夫「長大吊橋の耐風設計法と安全性について」土木学会論文集, 第142号, 1967
2) 例えば Y.K.Lin : First-Excursion Failure of Randomly Excited Structures, AIAA Jour. Vol.8, No.4, 1970
3) S.O.Rice : Mathematical Analysis of Random Noise, in Selected Papers on Noise and Stochastic Process, N.Wax, Ed. Dover Pub. 1954
4) 小池・亀田「荷重履歴による強度劣化を伴なう構造物の信頼性解析」土木学会論文報告集, 第228号, 1974
5) 西村昭「鋼材の機械的性質のばらつきについて」JSSC, Vol.5, No.48, 1969
6) 亀田弘行「構造物の不規則振動に関する一考察」土木学会年次概要集, 1969