

広島大学工学部 正員 佐藤 誠
 学生員 大畑 徹夫

1. はじめに

粘弾性波動伝播解析を行なう手法は種々提案されているが、ここでは線型粘弾性体としての典型的なロジエモデルを考へ、それに対して体積弾性係数を一定と仮定した場合の構成方程式を直接運動方程式に持ち込んだ粘弾性波動方程式に関する陽型差分方程式を考へる。このとき差分近似型式の送り方により von Neumann の安定性の条件が異なり、また場合によっては存在しない。本報告ではこの安定性の条件を求め、この条件下の若干の数値計算結果を示す。

2. 粘弾性波動方程式

体積弾性係数 K を一定とすると、線型粘弾性体の応力偏差とひずみ偏差の関係が線型微分演算子 P, Q に対して $P\sigma_{ij} = Q\epsilon_{ij}$ であれば構成方程式は次式となる。

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}(3K - \frac{Q}{P})\delta_{ij}\epsilon_{kk} + \frac{Q}{P}\epsilon_{ij} \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (1)$$

ここで $\lambda_0 = \frac{1}{2}(3K - \frac{Q}{P})$, $\mu_0 = \frac{Q}{2P}$ として、物体力を無視し、密度を ρ とする運動方程式 $\rho\ddot{u}_i = \sigma_{ij,j}$ は平面ひずみ場と平面応力場に対してそれぞれ

$$\rho\ddot{u}_\alpha = (\lambda_0 + \mu_0)u_{\alpha,\alpha} + \mu_0 u_{\alpha,\beta\beta}, \quad \rho\ddot{u}_\beta = (\lambda_0 + \mu_0)u_{\beta,\alpha\alpha} + \mu_0 u_{\beta,\alpha\beta} \quad (2)$$

となる。ここで $\alpha, \beta = 1, 2$, $\bar{\lambda}_0 = 2\mu_0\lambda_0 / (\lambda_0 + 2\mu_0)$ である。

図-1 に示した Voigt モデルに対する μ_0, λ_0 の値は以下となる。

Voigt Model : $\mu_0 = \mu_0(1 + T_2\alpha)$, $\lambda_0 = K - \frac{2}{3}\mu_0$.

3-parameter Model : $\mu_0 = \mu_0(m + T_1\alpha) / (1 + T_1\alpha)$, $\lambda_0 = K - \frac{2}{3}\mu_0$.

ここで μ_0 は緩和後の μ_0 , T_2 は遅延時間, μ_0 は非緩和 μ_0 ($\mu_0 = \mu_1 + \mu_2$), T_1 は緩和時間, $m = \mu_1/\mu_0$ である。したがって 3-parameter Model に対しては $m=1$ のとき $\mu_1=0, \mu_0=\mu_2$ の弾性体と一致し、 $m=0$ のとき $\mu_2=0, \mu_0=\mu_1$ である Maxwell Model と一致する。

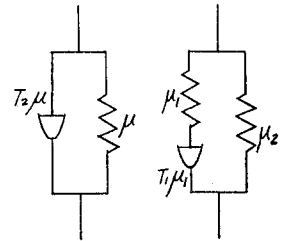
3. 波動方程式の陽型差分近似と安定性の条件

上式を平面応力場 3-parameter Model の場合では、 x, y 方向の変位を u, v とするとき、 u に関する波動方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + K_1 T_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_2 T_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^4} &= C_{11}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{21}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial x} + C_{13}^2 T_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial x} + C_{11}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C_{22}^2 T_1 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2 \partial x} + C_{23}^2 T_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2 \partial x} \\ &+ (C_{11}^2 - C_{11}^2) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2 \partial y} + (C_{12}^2 - C_{22}^2) T_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2 \partial y \partial x} + (C_{13}^2 - C_{23}^2) T_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2 \partial y \partial x} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで $K_1 = 2\{3K + 2\mu_0(1+m)\} / (3K + 4\mu_0 m)$, $K_2 = (3K + 4\mu_0) / (3K + 4\mu_0 m)$, $C_{11}^2 = 4\mu_0 m (3K + \mu_0 m) / \rho(3K + 4\mu_0 m)$, $C_{12}^2 = 4\mu_0 \{3K(1+m) + 2\mu_0 m\} / \rho(3K + 4\mu_0 m)$, $C_{13}^2 = 4\mu_0 (3K + \mu_0) / \rho(3K + 4\mu_0 m)$, $C_{21}^2 = \mu_0 m / \rho$, $C_{22}^2 = \mu_0 \{3K(1+m) + 8\mu_0 m\} / \rho(3K + 4\mu_0 m)$, $C_{23}^2 = \mu_0 (3K + 4\mu_0) / \rho(3K + 4\mu_0 m)$ である。

上式に対して陽型であるような差分近似の型式は多数考へられるが、この場合にも安定性の条件が存在するとは限らない。そのうち安定性の条件が存在する 2 つの代表的な差分型式を δ 型と ν 型とする。 δ 型は (3) の左辺を 1 項と中央差分し、 ν 項は δ 型の最高階からの後退差分、右辺は左辺の最高階より 1 つ低階からの後



Voigt Model 3-parameter Model

図-1 線型粘弾性モデル

遅差分とするものである。V型は右辺の時間に関する差分をすべて前進差分とし、左辺は右辺の最高階より1つ高階からの後退差分とするものである。なお空間に関しては両者ともに中央差分としている。いずれも時間軸の分散を最小にする差分型式であるが、それぞれ安定範囲が異なる。図-2は3-parameter Modelの平面応力場に対するδ型とV型の $\nu=0.36$ の場合の安定領域を示す。ただし $C_1 = \mu/\rho$, $m = \sigma t/\Delta x$, $\tau = T/\Delta t$ である。この結果はV型には τ に限界があること、局部的にはV型の方が安定領域が広いことがあるが、 τ が増加するに従っていずれも弾性体の場合の値に近づくことがわかる。従って3-parameter Modelに対しては弾性体の条件を用いれば十分である。ただしこれに示していないが Voigt Model の場合には全く異なる条件となる。図-3は変位入力に対して側面の変位を拘束した $10 \times 10 \times 100$ mm棒の平面応力場解と、拘束のない棒の平面応力場解と変位 u と応力 σ を比較したものである。変位は極めてよく一致している。図-4はhalf sineの入力 $C_1 m$ に対してVoigt Modelの平面応力場解についてδ型とV型の変位と応力を比較したものである。それぞれピーク値には数%の差があるが波形の本質はほとんど差がない。詳しい検討は講義を参照せよ。

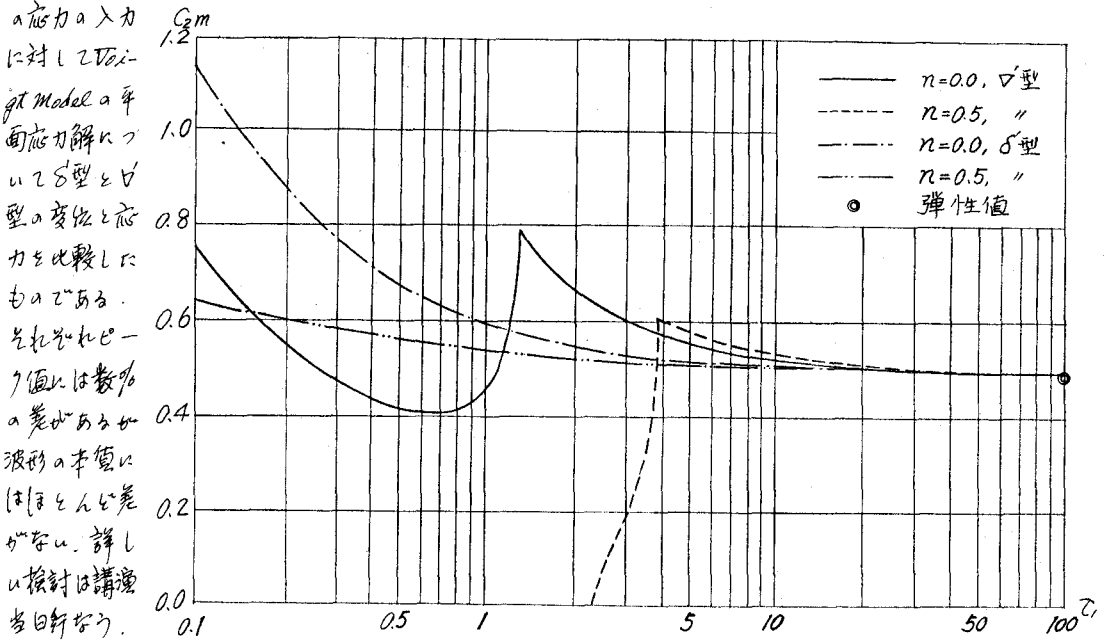


図-2 Stability Criteria of 3-parameter Model, Plane Stress. $\nu=0.36$

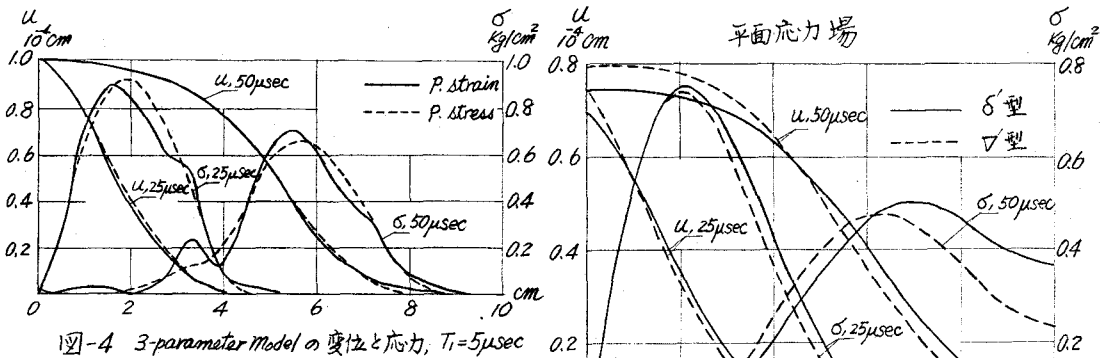


図-4 3-parameter Modelの変位と応力, $T_1=5\mu\text{sec}$

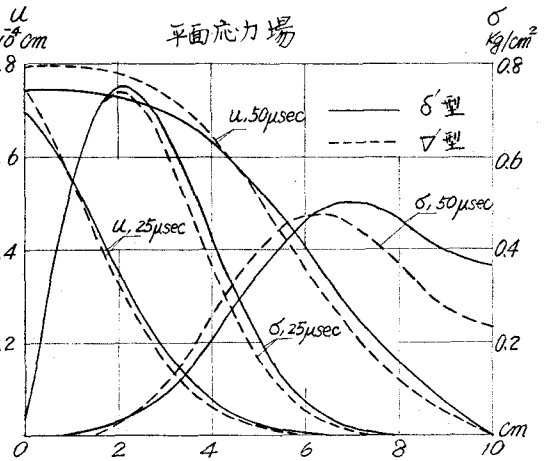


図-3 Voigt Modelの変位と応力, $T_2=5\mu\text{sec}$

*) 参考文献: たとえば Richtmyer, R.D., & Morton, K.W., "Difference Methods for Initial-Value Problems," Interscience Pub. 1967.