

北海道大学工学部 正員 能町純雄
 室蘭工業大学 正員 松岡健一
 室蘭工業大学 学生員 坂下正幸

1. まえがき 弾性体中を伝わる弾性波に関する研究はこれまでよく進められてきたが、本論では弾性媒体内に同心円状に置かれた多層の円筒体を伝わる弾性波として、波長、各層の弾性定数および層厚等の変化に対する弾性波の速度の変化を検討するものである。こゝでの解析対象としたのは層の場合であり、弾性媒体内に異質の円筒形弾性体があることと想定している。

2. 円柱座標に於ける運動方程式の解 円柱座標に於ける半径方向に r 軸、接線方向に θ 軸、円柱軸方向に z 軸とし、それぞれ方向の分変位を u, v, w とする。対象とする振動を調和振動と仮定すれば、弾性体の運動方程式の解は Hankel 変換を用いて次のように求められる。

$$u = \frac{2}{\pi C} (A_{mr} - B_{mr}) \cos \theta \sin(\rho t - Nz) \quad (1), \quad v = \frac{2}{\pi C} (A_{mr} + B_{mr}) \sin \theta \sin(\rho t - Nz) \quad (2)$$

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi C} \frac{2}{\rho^2} \left[\frac{N^2}{\rho^2} \{ G_m^{(k)}(Nr) - G_m^{(k)}(Na_k) \} \{ (\beta_m^{(k)} + 2\mu(m+1)A_m^{(k)} - 2\mu(m-1)B_m^{(k)} + 2\mu N E_m^{(k)}) \} + G_m^{(k)}(Ns) E_m^{(k)} \right] \cos \theta \sin(\rho t - Nz) \quad (3)$$

こゝで

$$A_{mr} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2\mu} \frac{1}{N_s} \chi_{mp}^{(k)}(Ns) \alpha_m^{(k)} + \left\{ \left(\frac{\mu}{2\mu + \lambda} - \frac{NN^2}{\rho^2} \right) \frac{1}{N_p} \chi_{mp}^{(k)}(Nr) + \frac{NN^2}{\rho^2} \frac{1}{N_s} \chi_{mp}^{(k)}(Ns) \right\} \left\{ \frac{1}{2\mu} (\beta_m^{(k)} + (m+1)A_m^{(k)} - (m-1)B_m^{(k)} + N E_m^{(k)}) + \frac{1}{N_s} \chi_{ms}^{(k)}(Ns) \right\} (m+1)A_m^{(k)} + (m-1)B_m^{(k)} - \frac{1}{2} N E_m^{(k)} \right] \quad (4)$$

$$B_{mr} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{2\mu} \frac{1}{N_s} \chi_{ms}^{(k)}(Ns) \alpha_m^{(k)} + \left\{ \left(\frac{\mu}{2\mu + \lambda} - \frac{NN^2}{\rho^2} \right) \frac{1}{N_p} \chi_{ms}^{(k)}(Nr) + \frac{NN^2}{\rho^2} \frac{1}{N_s} \chi_{ms}^{(k)}(Ns) \right\} \left\{ \frac{1}{2\mu} (\beta_m^{(k)} + (m+1)A_m^{(k)} - (m-1)B_m^{(k)} + N E_m^{(k)}) - \frac{1}{N_s} \chi_{ms}^{(k)}(Ns) \right\} (m+1)A_m^{(k)} + (m-1)B_m^{(k)} + \frac{1}{2} N E_m^{(k)} \right] \quad (5)$$

上式中、 μ, λ は Lamé の定数、 $N = \pi / C$ 、 ρ は弾性体の密度であり、 $m = 0, 1, \dots$

$$N_s^2 = N^2 - \frac{\rho^2}{\mu} = N^2 \left(1 - \frac{\rho^2}{\mu N^2} \right), \quad N_p^2 = N^2 - \frac{\rho^2}{2\mu + \lambda} = N^2 \left(1 - \frac{\mu}{2\mu + \lambda} \frac{\rho^2}{\mu N^2} \right)$$

また、 $G_m^{(k)}, \chi_{mp}^{(k)}, \chi_{ms}^{(k)}$ は Bessel 関数で表わされる関数で、円筒部の弾性体に於けるのは、

$$G_m^{(k)}(Nr) = \frac{R_{m,m}^{(k)}(Nr)}{R_{m,m}^{(k)}(Na_k)}, \quad \chi_{mp}^{(k)}(Nr) = \frac{R_{m+1,m}^{(k)}(Nr)}{R_{m,m}^{(k)}(Na_k)}, \quad \chi_{ms}^{(k)}(Ns) = \frac{R_{m+1,m}^{(k)}(Ns)}{R_{m,m}^{(k)}(Na_k)}$$

こゝで、 $R_{i,j}^{(k)}(Nr) = I_j(Nr) K_i(Na_k) - (-1)^{i+j} I_i(Na_k) K_j(Nr)$ 、 I, K は第 1 種、第 2 種の変形 Bessel 関数であり、 $a_1 = b, a_2 = a, a_0 = a$; b : 外径、 a : 内径である。無限弾性体については $b \rightarrow \infty$ とするこゝにより上の公式は K のみで表わされ、また円筒部の弾性体については $a \rightarrow 0$ とするこゝにより I のみで表わされる。式(3)中の $\alpha_m^{(k)}, \beta_m^{(k)}, A_m^{(k)}, B_m^{(k)}, E_m^{(k)}$ は境界における物理量により与えられることとなり、それぞれ $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_r, A_{mr}, B_{mr}, w$ の $r = b (k=1), r = a (k=2)$ における値で積分定数である。これは通常境界条件を課すことにより決定する。また応力成分の式は Hooke の法則を用いて式(1)~(5)から導かれる。

3. 境界条件 次頁の図のように円筒形弾性体 k 層をとり、中心から接線面に至る半径を r_k とする。まず、式(4)、(5)から境界の未知数 $A_m^{(k)}, B_m^{(k)}$ は次の条件を満足しなければならない。

$$A_m(r_n)/r_{n,i} = A_m^{(2)} \quad (6) \quad B_m(r_n)/r_{n,i} = B_m^{(2)} \quad (7)$$

$$A_m(r_{n+1})/r_{n,i} = A_m^{(1)} \quad (8) \quad B_m(r_{n+1})/r_{n,i} = B_m^{(1)} \quad (9)$$

境界条件として、第 \$n\$ 層と第 \$(n+1)\$ 層との間にせん断力が作用する場合は

(I) と作用(対)の場合(II)とで、それぞれ次のようになる。

I. i) $U_n(r_{n,i}) = U_{(n+1)}(r_{n,i}), V_n(r_{n,i}) = V_{(n+1)}(r_{n,i}), W_n(r_{n,i}) = W_{(n+1)}(r_{n,i})$

$$\therefore A_m^{(2)} = A_m^{(1)} = A_m, B_m^{(2)} = B_m^{(1)} = B_m, E_m^{(2)} = E_m^{(1)} = E_m$$

ii) $\tau_{rn}(r_{n,i}) = \tau_{r(n+1)}(r_{n,i}), \tau_{\theta n}(r_{n,i}) = \tau_{\theta(n+1)}(r_{n,i})$

$$\therefore \alpha_m^{(2)} = \alpha_m^{(1)} = \alpha_m, (\beta_m^{(2)} = \beta_m^{(1)} = \beta_m$$

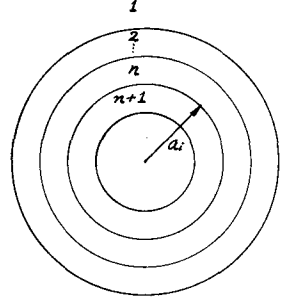
iii) $\tau_{zn}(r_{n,i}) = \tau_{z(n+1)}(r_{n,i}) \quad (10)$

II. i) $U_n(r_{n,i}) = U_{(n+1)}(r_{n,i}) \quad \therefore A_m^{(2)} + B_m^{(2)} = A_m^{(1)} + B_m^{(1)} \quad (11)$

ii) $\tau_{rn}(r_{n,i}) = \tau_{r(n+1)}(r_{n,i}) \quad \therefore (\beta_m^{(2)} = \beta_m^{(1)} = \beta_m$

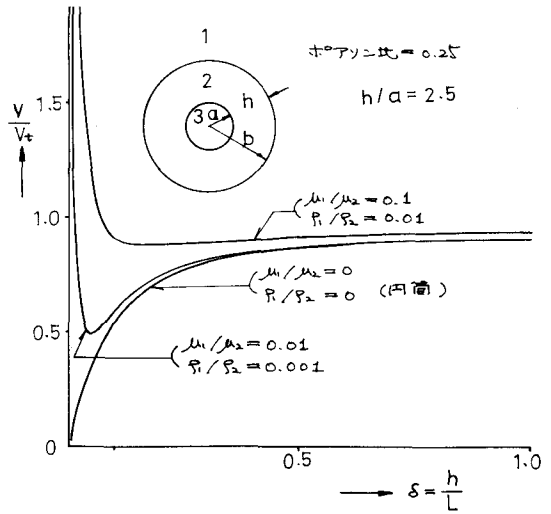
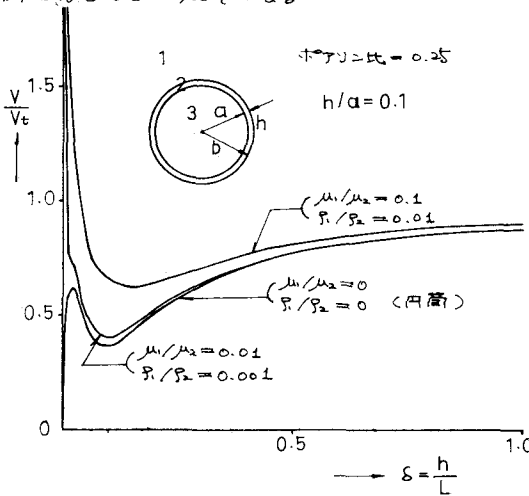
iii) $\tau_{\theta n}(r_{n,i}) = \tau_{\theta(n+1)}(r_{n,i}) \quad \therefore \alpha_m^{(2)} = \alpha_m^{(1)} = 0$

iv) $\tau_{zn}(r_{n,i}) = \tau_{z(n+1)}(r_{n,i}) = 0 \quad (12), (13)$



すなわち、I-場合の境界の未知数は $A_m, B_m, E_m, \alpha_m, \beta_m$ の5つあり、これは式(6)~(9)より(10)の5式より決定でき、またIIの場合の境界の未知数は $A_m^{(2)}, B_m^{(2)}, E_m^{(2)}, \beta_m^{(2)}, A_m^{(1)}, B_m^{(1)}, E_m^{(1)}, \alpha_m^{(1)}$ の7つあり、これは式(6)~(9)より(11), (12), (13)の7式より決定できる。こゝでは境界面に伝播する弾性波の速度について考へるが、これは上記の境界条件式の係数行列の行列式を零とする p を求めること(14)とされる。すなわち、弾性波の速度 $V = p/N = c_p/\pi$ である。

4. 計算例 数値計算例としてポアソン比および円筒部の弾性係数、径厚比一定とし、中心部の弾性係数異なる場合を想定している。下の図は縦軸に境界に伝わる弾性波の速度 V と横波の速度 $V_t (= \sqrt{\mu/\rho})$ (一定) との比 V/V_t と、横軸には円筒部弾性体の肉厚 h と波長 $L (= 2c)$ との比 $s = h/L$ とで示している。こゝに示した結果は $m=1$ (曲げ) の場合であり、境界条件としてせん断力が作用する場合である。図は外側の弾性体も同じものとすれば、これは中空円筒に伝わる弾性波となるが、この計算結果は薄肉の場合には Hermann によるミエリ理論を用いた結果とほとんど一致している。



※参考文献

1) K. G. Matsuba, S. G. Nomachi: 'On a 3-Dimensional Stress Analysis of an Annular Cylindrical Body by Means of 2) 熊町, 花岡: 弾性体円筒に Cylindrical Rod があるときの弾性波について, 第24回応力連合会議要録集 3) I. Minsky and G. Hermann: 'Nonaxially Symmetric Motions of Cylindrical Shells, J. Acoust. Soc. Am. 29, 1116-1123 (1957)

Fourier-Hankel Transforms, M.C.T.A.M. 1972