I-263　"[" 桁の波動伝播特性について

北海道大学工学部　正員　能町 純雄
〃　正員　角田与史雄
〃　学生員　○岸　徳光

1．まえがき　薄肉断面部材の波動伝播特性において，軸方向ひずみの線形変化と断面不変形を仮定している古典はり理論や，さらにせん断変形と回転慣性を考慮するTimoshenko beam 的考え方に基いた結果が厳密理論にどの程度一致しているかを調べることは興味のあるところである。

先に著者等は、薄板要素の動的平面応力問題と動的曲げ問題に関する基礎微分方程式を厳密に解き、マトリックス解析によって，薄肉H形断面桁や薄肉箱桁部材の波動伝播性状について調べている[*]。

本論文においては，特に"[" 桁に注目し，波動伝播性状をよく表わす位相速度分散曲線および群速度分散曲線，モード分布を示し，"[" 桁の波動伝播特性を調べ，諸はり理論の適用性について検討するものである。

2．解析理論　解析にあたり，薄板要素は等方等質であり，厚さ h は板幅 b に比べて十分小さく，変形は微小であると仮定する。また，任意の薄板要素において座標系および変位は図-1のように定める。時間を t，位相速度，波長をそれぞれ c, λ とする。x 軸方向の進行波を仮定して周期的境界条件を考慮すると，各変位成分は変数分離して次のように示される。

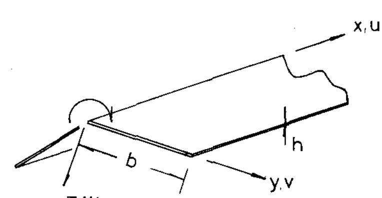

図-1　任意の一薄板要素

$$u = U\cos\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct) \qquad v = V\sin\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)$$
$$w = W\sin\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct) \qquad \theta = \Theta\sin\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct) \qquad \cdots (1)$$

面内変形，面外変形はそれぞれ，

a)．面内変形に関して

慣性力を考慮した力のつりあい式は，

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad \cdots (2)$$

応力とひずみの関係式はHooke's lawに従うものとすれば，平面応力問題では，

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial v}{\partial y}\right) \qquad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{xy} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad \cdots (3)$$

式(1)を考慮し，式(2)にそれぞれ $\sin\frac{n\pi}{b}y$, $\cos\frac{n\pi}{b}y$ を乗じ，$0<y<b$ の間に有限Fourier変換をおこなう。式(3)の考慮のもとに部分積分を施し整理すると，U，Vの像関数が求められる。それらに逆変換を施し y 方向に閉じた式に整理すると変位U，Vが求まる。このU，Vを式(3)に代入することにより，面内変形に関する境界断面力を全て境界変位で表わすことができる。

b)．面外変形に関して

曲げの動的つりあい式は，x, y 軸回りの曲げモーメントを M_y, M_x，ねじりモーメントを M_{yx} とすると，

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad \cdots (4)$$

また，断面力および y 軸方向の反力 R_y と曲率との関係式は曲げ剛性を $D\left(=E/12(1-\nu^2)\right)$ とすると，

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$M_{yx} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \qquad R_y = -D\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\} \qquad \cdots (5)$$

面内変形と同様に式(1)を考慮し，式(4)に $\sin\frac{n\pi}{b}y$ を乗じ，$0<y<b$ の間に有限Fourier変換を施す。式(5)を考慮して部分積分しWの像関数を求める。さらに逆変換を施し，y 方向に閉じた式に整理するとWが求まる。このWを式(5)に代入することにより面外変形に関する境界断面力を全て境界変位で表わすことができる。

以上をマトリックス形式に整理し、薄板要素に関する動的剛性マトリックスを完成する。座標変換マトリックスを介して構造全体のマトリックス関係式を求めると、

$$[K_{st}]\{\Delta\}=\{P\} \qquad \cdots \quad (6)$$

$\{\Delta\}\neq 0$, $\{P\}=0$ より $\det[K_{st}]=0$ が成立し固有の位相速度を求めることができる。

また、群速度は、求まった位相速度を $V_e\left(=C/\sqrt{G/\rho}\right)$ とすると、次のように定義づけられる。すなわち、

$$V_g = V_e - \lambda\frac{\partial V_e}{\partial \lambda} \qquad \cdots \quad (7)$$

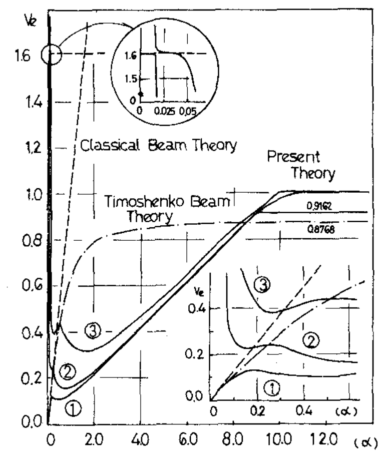

図-3 対称波動位相速度分散曲線

3. "[" 桁の波動伝播特性

図-2に示すような"["桁において、断面形状比を $B/H=1/3$, $h/H=1/30$、ポアソン比を0.3とし、波長を無次元化して $\alpha=H/\lambda$ とした。

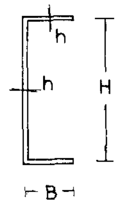

図-2 "[" 部材

一軸対称断面である故、次の2つの波動パターンを設定した。すなわち

① 対称波動 ② 逆対称波動 である。

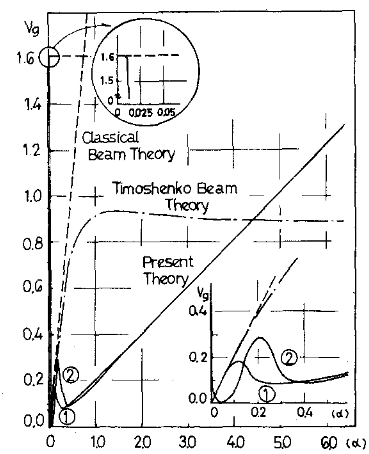

図-4 対称波動群速度分散曲線

図3〜6に、上の各波動に対する位相速度分散曲線、および群速度分散曲線を諸はり理論とともに示した。

各波動の最低次2曲線について考えると、対称波動においては、最低次は横方向曲げたわみ波動であり、第2曲線は縦波動に相当するものである。また、逆対称波動においては、(連成波動であるが)、最低次は鉛直方向曲げたわみ波動、第2曲線はねじり波動に相当するものである。いずれの波動も次の3つの部分に分けられる。①、低周波域では従来からのはり理論による波動、②、中間部周波数領域では薄板要素の曲げ波動 ③、高周波域では、各波動の最低次はRayleigh波による波動で、他はせん断波による波動である。これより諸はり理論は、低周波領域以外適用できないと考える。群速度についても同様である。

なお、各波動モードについては、当日スライドで示す予定である。

* 参考文献 能町純雄 et al "薄肉箱桁部材の波動分散曲線について" 日本鋼構造協会第9回大会マトリックス構造解析法研究発表論文集 pp485〜488

その他

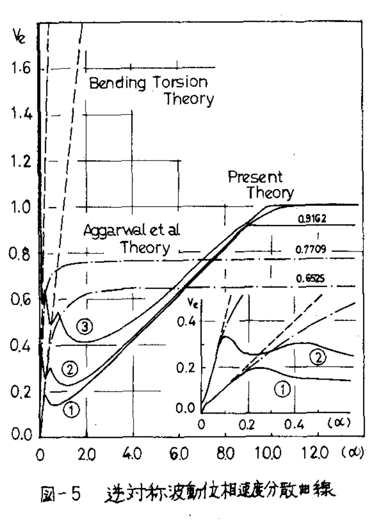

図-5 逆対称波動位相速度分散曲線

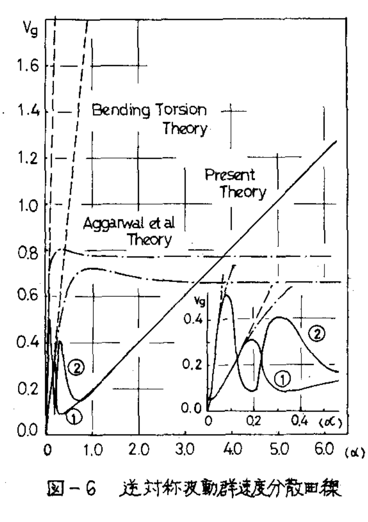

図-6 逆対称波動群速度分散曲線