

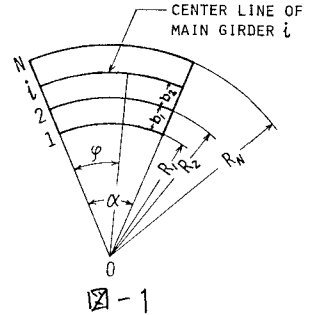
九州大学 工学部 正員 彦坂 熙  
 " " 学生員 〇米田利博  
 " " " 野田 建治

1. 緒言

複数の工形または箱形断面の曲線主桁が横桁で結合された曲線橋について、横断面の变形を考慮した動的解析モデルを提示し、走行 Sprung Mass による応答性状を調べた。横桁は法線方向の曲げ剛性のみをもつ扇形板に置換し、横桁、横構および床板の質量はすべて各主桁に集中させる。

2. 並列主桁曲線橋の自由振動解析

図-1のように、点Oを中心として、中心角 $\alpha$ 、曲率半径 $R_1, R_2, \dots, R_N$ なるN本の主桁が横桁および床板で結合された曲線橋を考える。任意の主桁 $i$ の曲げ剛性を $EI_i$ 、ねじり剛性を $GJ_i$ 、そり剛性を $EI_{wi}$ 、ねじり回転半径を $\alpha_i$ 、単位長当りの質量を $\rho_i$ とし、時刻 $t$ において任意点 $\varphi$ の鉛直たわみおよびねじり角をそれぞれ $w_i, \theta_i$ とすれば、次の運動方程式がえられる。



$$\left. \begin{aligned} \frac{EI_i}{R_i^3} \left\{ (1+\gamma_i) \frac{\partial^2 w_i}{\partial \varphi^2} - \mu_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial \varphi^2} + (1+\mu_i) \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \varphi^2} - \gamma_i \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \varphi^2} \right\} + R_i \rho_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} &= -R_i (v_i + \bar{v}_i) \\ \frac{EI_i}{R_i^3} \left\{ (1+\mu_i) \frac{\partial^2 w_i}{\partial \varphi^2} - \gamma_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial \varphi^2} + \psi_i - \mu_i \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \varphi^2} + \gamma_i \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \varphi^2} \right\} + \frac{\alpha_i^2 \rho_i}{R_i} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} &= -(m_i + \bar{m}_i) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、 $\psi_i = R_i \theta_i$      $\mu_i = GJ_i/EI_i$      $\gamma_i = I_{wi}/R_i^2 I_i$

また、式(1)の右辺の $v_i, \bar{v}_i, m_i, \bar{m}_i$ は主桁と横桁の結合かた変断面直線材のたわみ角式と利用することにより変形量で表わされる。<sup>1)</sup>

曲線橋の境界条件を単純支持とすれば、波数 $n$ の固有円振動数を $\omega_n$ として、式(1)の解が次式で与えられる

$$w_i = W_{in} \sin \frac{n\varphi}{\alpha} \sin \omega_n t \quad \psi_i = \psi_{in} \sin \frac{n\varphi}{\alpha} \sin \omega_n t \quad (2)$$

すべての主桁( $i=1, 2, \dots, N$ )について、式(2)を式(1)に代入のうえ、式(1)の右辺の消去すれば、結局次式がえられる

$$\left( \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}_n - \omega_n^2 \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M' \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} W_n \\ \psi_n \end{Bmatrix} = 0 \quad (3)$$

ここに、 $W_n = (W_{1n}, W_{2n}, \dots, W_{Nn})^T$ ,  $\psi_n = (\psi_{1n}, \psi_{2n}, \dots, \psi_{Nn})^T$ ,  $K$ は剛性マトリクス

$$M = [R_1 \rho_1, R_2 \rho_2, \dots, R_N \rho_N] \quad (対角行列) \quad M' = [\alpha_1^2 \rho_1 / R_1, \alpha_2^2 \rho_2 / R_2, \dots, \alpha_N^2 \rho_N / R_N] \quad (対角行列)$$

一般に、個々の主桁のねじり慣性は無視できるので、 $M' = 0$ とおけば、式(3)から $\psi_n$ が消去される。

すなわち、 $(K'_n - \omega_n^2 M) W_n = 0$     ただし  $K'_n = K_1 - K_{22}^{-1} K_{21} K_{12} K_{11}$     (4)

$$\psi_n = -K_{22}^{-1} K_{21} W_n \quad (5)$$

式(4)の係数行列式  $|K'_n - \omega_n^2 M| = 0$  なる条件よりN個の固有円振動数 $\omega_n$ が求められ、同じくN組の固有ベクトルが算定できる。

3. 並列主桁曲線橋の走行荷重応答解析

図-1の並列主桁曲線橋の任意の主桁 $i$ 上に強度 $g_i(t)$ なる強制外力が働くとする。外力 $g_i(t)$ をフーリエ級数に展開して、 $g_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{in}(t) \sin(n\varphi/\alpha)$  とおけば、自由振動の式(4)に代わる次の運動方程式をうる

$$K'_n W_n + M \dot{W}_n = \{R_i g_{in}(t)\} \quad (6)$$

ここで、低次の  $r$  個の固有値  $\omega$  とそれに対応する  $r$  組の固有ベクトル  $v$  を利用して、modal analysis を適用する。 $r$  組の固有ベクトルを  $D = (D_1 D_2 \dots D_r)$ 、一般座標を  $\underline{v}(t) = (\underline{v}_1 \underline{v}_2 \dots \underline{v}_r)^T$  とおけば、 $N$  本の主桁のたわみ  $W = (W_1 W_2 \dots W_N)^T$  およびねじり角  $\underline{\psi} = (\psi_1 \psi_2 \dots \psi_N)^T$  の応答が次式で求められる。

$$W = (D \sin \frac{\omega \alpha}{2}) \underline{v}(t) \quad \underline{\psi} = -(K_{22}^{-1} K_{21} D \sin \frac{\omega \alpha}{2}) \underline{v}(t) \quad (7)$$

いま、時刻  $t$  と共に大きさが任意に変化する 1 個の集中荷重  $P(t)$  が一定速度  $v$  で主桁  $i$  上を走行する場合を考える。

$$\omega_{nv} = \pi R v / R_0 \alpha \quad \text{とおけば、} \quad \delta_{in}(t) = (2/R_0 \alpha) P(t) \sin \omega_{nv} t \quad (8)$$

となり、また  $D$  の中で主桁  $i$  の固有ベクトルを  $d_i = (d_{i1} d_{i2} \dots d_{ir})$  とすれば、一般座標  $\underline{v}(t)$  に関する次の微分方程式がえられる。

$$\ddot{\underline{v}} + 2[H_r] \dot{\underline{v}} + [Q_r] \underline{v} = (2/\alpha) L^{-1} (d_i \sin \omega_{nv} t)^T P(t) \quad (9)$$

ここに、 $[Q_r] = [\omega_1 \omega_2 \dots \omega_r]$ 、 $[Q_r^2] = [\omega_1^2 \omega_2^2 \dots \omega_r^2]$ 、 $[H_r] = [h_1 h_2 \dots h_r]$  ( $h_r, \omega_r$  はそれぞれ  $r$  次の減衰定数および  $r$  次の固有値)、 $L = D^T M D$  で  $[H_r]$ 、 $[Q_r]$ 、 $[Q_r^2]$ 、 $L$  はいずれも  $r \times r$  の対角行列である。

走行荷重を図-2 のような振動系に置換すれば、式(9)は次のように書き換えられる。

$$\ddot{\underline{v}} + (2/\alpha) M_u L^{-1} (d_i \sin \omega_{nv} t)^T [(d_i \sin \omega_{nv} t) \underline{v}] + 2[H_r] \dot{\underline{v}} + [Q_r] \underline{v} = (2/\alpha) \{ (M_s + M_u) \dot{z} - M_s \ddot{z} \} L^{-1} (d_i \sin \omega_{nv} t)^T \quad (10)$$

また、ばね上質量  $M_s$  の運動方程式は  $\omega_0 = \sqrt{k/M_s}$ 、 $k_0 = C/2\sqrt{kM_s}$  として

$$\ddot{z} + 2h_0 \omega_0 \{ \dot{z} - (d_i \sin \omega_{nv} t) \underline{v} \} + \omega_0^2 \{ z - (d_i \sin \omega_{nv} t) \underline{v} \} = 0 \quad (11)$$

式(10)、(11)を  $\underline{v}$  と  $z$  の連立微分方程式として数値積分し、式(7)を用いれば、たわみ応答  $W$  およびねじり角応答  $\underline{\psi}$  がえられ、さらに  $W$ 、 $\underline{\psi}$  を用いて断面力の応答が求められる。

#### 4. 数値計算例

図-3 の断面形状をもつ 2 主桁曲線橋について (横桁の換算板剛度  $= 0.125 EI/B$ ) 荷重が外桁上を走行する場合の外桁中央の動的たわみと同位の静的たわみの最大値

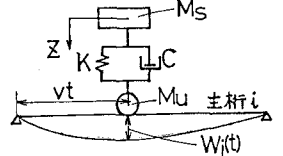


図-2

との比を求めたものが図-4 である。なお、解析上、次の無次元パラメータを用いた  
 $A_v$ : 等価直線橋の 1 次固有周期の  $1/2$  と車両が橋を通過するのに要する時間との比  
 $R_M$ : 車両の全質量と曲線橋の全質量との比  $Q_0$ : 車両ばねの初期変位と静的変位との比  
 $\phi_v$ : 車両の固有振動数と等価直線橋の 1 次固有振動数との比  $R_w$ : ばね上質量と車両の全質量との比  
 ここで、等価直線橋とは曲線橋と同じスパン  $L$ 、全断面の曲げ剛性  $EI$ 、質量  $P$  を有する直線橋を意味する。また、表-1 はパラメータの各組合せにおけるたわみ応答倍率の最大値を示す。ただし、この計算例では  $R_w = 1.0$  とした

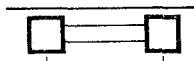


図-3

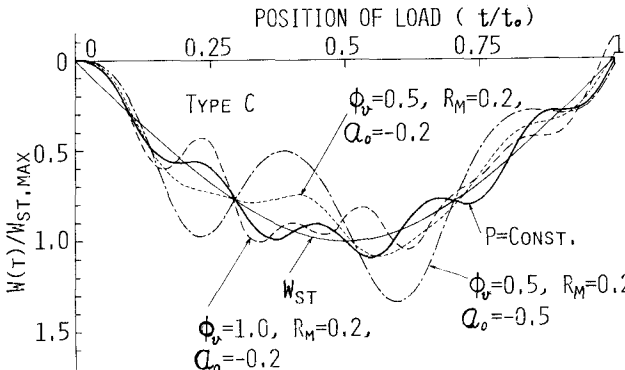


図-4 外桁中央のたわみ応答 (Sprung mass 外桁走行  $A_v = 0.1$ )

$\phi_v$	$Q_0$	$R_M$		
		0.1	0.2	0.5
0.5	0	1.052	1.055	1.081
	-0.2	1.162	1.121	1.026
	-0.5	1.413	1.375	1.223
1.0	0	1.014	1.047	1.056
	-0.2	1.155	1.078	1.092
	-0.5	1.555	1.328	1.225
1.5	0	1.018	1.017	1.059
	-0.2	1.020	1.005	1.053
	-0.5	1.076	1.040	1.052

表-1 外桁中央のたわみ応答倍率の最大値

[参考文献] 1) 彦坂、大塚、末田：横断面の変形を考慮した曲線橋の振動解析 昭和49年度土木学会西部支部研究発表会講演集

(外桁走行、 $A_v = 0.1$ ,  $k = 0.01$ ,  $k_0 = 0.03$ )