I-258　ボックスガーダーの振動性状に関する基礎的研究

東京大学　正員　西岡　隆
東京大学　学生員　○水上隆男

1. まえがき

ボックスガーダーの動的挙動に関する解析方法としては、従来有限要素法、有限帯板法などが多く用いられてきた。これらの解析方法においては要素内の変位あるいはその一部を任意の多項式に近似して解析するが、振動問題をとりあつかう場合には直交関数を用いて近似した方が都合がよい。したがって本報告では単純支持されたボックスガーダーの動的挙動を実フーリェ級数を用いて解析した。

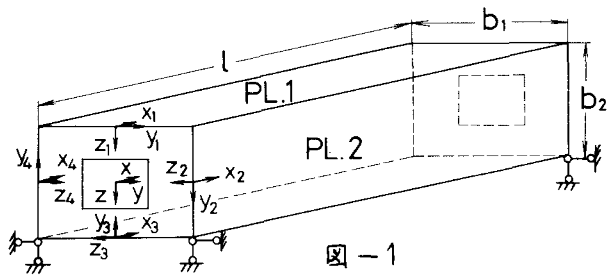
解析における基本的な考え方は次のようなものである。ボックスガーダーを4枚の板要素の集合体と考え、各板要素について梁の軸方向並びにそれに直交する方向に2重フーリェ級数に展開した形で各変位を仮定する。次に各節線で板要素を適合させて、断面変形を考慮したボックスガーダーの振動数方程式を誘導する。

2. ボックスガーダーの自由振動

理論解析の対象とする構造物は、図－1のような両端に剛なダイヤフラムが入っている単純支持のボックスガーダーとする。上記の構造物を4枚の長方形板(板要素)の集合体とみなして解析するため各板要素ごとに図のように局所座標系をとる。スパンが l, 幅が b、板厚が h の形状の板要素において、x, y, z 方向のそれぞれの変位を u, v, w、面内力を N_x, N_y, N_{xy} とすれば、振動方程式は以下のように与えられる。

$$\nabla\nabla w + \frac{\gamma}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$
$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - \gamma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{—— (1)}$$
$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} - \gamma\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

ただし　$\gamma = \rho h$, $D = \dfrac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$



図－1

$x = 0, l$ で板が単純支持されていると考えて，変位 u, v, w を次のように仮定する。

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(y)\cdot e^{i\omega_n t}\cdot \cos\alpha_n x \qquad U_n(y) = \frac{1}{b}u_n^c(0) + \frac{2}{b}\sum_{m=1}^{\infty}\{u_n^c(m)\cdot\cos\beta_m y + u_n^s(m)\cdot\sin\beta_m y\}$$

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(y)\cdot e^{i\omega_n t}\cdot \sin\alpha_n x \qquad V_n(y) = \frac{1}{b}v_n^c(0) + \frac{2}{b}\sum_{m=1}^{\infty}\{v_n^c(m)\cdot\cos\beta_m y + v_n^s(m)\cdot\sin\beta_m y\}$$

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(y)\cdot e^{i\omega_n t}\cdot \sin\alpha_n x \qquad W_n(y) = \frac{1}{b}w_n^c(0) + \frac{2}{b}\sum_{m=1}^{\infty}\{w_n^c(m)\cdot\cos\beta_m y + w_n^s(m)\cdot\sin\beta_m y\}$$

ただし　$\alpha_n = \dfrac{n\pi}{l}$, $\beta_m = \dfrac{2m\pi}{b}$ 　　—— (2)

方程式(1)を変位 u, v, w で表わし，さらに(2)を代入してフーリェ級数の係数を u, v, w の真の境界値 $U_n(\frac{b}{2}), U_n(-\frac{b}{2}), U_n'(\frac{b}{2}), U_n'(-\frac{b}{2}), V_n(\frac{b}{2}), V_n(-\frac{b}{2}), V_n'(\frac{b}{2}), V_n'(-\frac{b}{2}), W_n(\frac{b}{2}), W_n(-\frac{b}{2}), W_n'(\frac{b}{2}), W_n'(-\frac{b}{2}), W_n''(\frac{b}{2}), W_n''(-\frac{b}{2}), W_n'''(\frac{b}{2}), W_n'''(-\frac{b}{2})$ の関数で表わす。

次にディリクレの積分定理を用いてフーリェ級数で展開した関数に真の境界値を代入する。すなわちマトリックスを用いて表現すれば次のように与えられる。ただしサフィックスの i は板要素の番号を示す。

$$\begin{bmatrix} f_i^*(\frac{b_i}{2}) + f_i^*(-\frac{b_i}{2}) \\ \bar{f}_i(\frac{b_i}{2}) + \bar{f}_i(-\frac{b_i}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & D_{i,12} \\ D_{i,21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_i^*(\frac{b_i}{2}) - f_i^*(-\frac{b_i}{2}) \\ \bar{f}_i(\frac{b_i}{2}) - \bar{f}_i(-\frac{b_i}{2}) \end{bmatrix} \quad \text{——(3)}$$

ただし $f_i^*(y_i) = \begin{bmatrix} U_n(y_i) \\ V_n'(y_i) \\ W_n(y_i) \\ W_n''(y_i) \end{bmatrix}$ $\bar{f}_i(y_i) = \begin{bmatrix} V_n(y_i) \\ U_n'(y_i) \\ W_n'(y_i) \\ W_n'''(y_i) \end{bmatrix}$

上式を変形して整理すれば

$$f_i(-\frac{b_i}{2}) = T_i \cdot f_i(\frac{b_i}{2}) \quad \text{——(4)}$$

ただし $f_i(y_i) = \begin{bmatrix} f_i^*(y_i) \\ \bar{f}_i(y_i) \end{bmatrix}$ $T_i = \begin{bmatrix} E & D_{i,12} \\ D_{i,21} & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -E & D_{i,12} \\ D_{i,21} & -E \end{bmatrix}$

ここで T_iは節点変位$f_i(-\frac{b_i}{2})$を$f_i(\frac{b_i}{2})$に伝達するためのマトリックスであり，Eは4×4の単位行列である。(4)式が板の振動性状に関する方程式である。

上記で求めた結果を用いて，4枚の板を適合させ，ボックスガーダーの振動数方程式を誘導する。全体座標と局所座標の間の変位の変換は

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ -w_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_3 \\ -v_3 \\ -w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_4 \\ w_4 \\ -v_4 \end{bmatrix} \quad \text{——(5)}$$

板要素 i と板要素 j の接合部における境界条件について考える。境界条件を変位u, v, wに関する条件式で表わし，さらに方程式(1)を代入して整理すれば$f_i(\frac{b_i}{2})$と$f_j(-\frac{b_j}{2})$を結びつける方程式が導かれる。すなわち相隣あう板の接合部における境界条件は一般に(6)式で表わされる。したがって(4)式と(6)式より振動数方程式が(7)式で与えられる。

$$f_i(\frac{b_i}{2}) = P_{ij} f_j(-\frac{b_j}{2}) \quad \text{——(6)} \qquad \left| E - P_{12} T_2 P_{23} T_3 P_{34} T_4 P_{41} T_1 \right| = 0 \quad \text{——(7)}$$

(7)式を満すω_nが各モードに対応する固有振動数を与えることになる。

3. ボックスガーダーの強制振動

強制力がPL1に作用した場合の強制振動は(1)式の右辺に強制力の項$Q(x,y,t)$を加えてその特解を求めることにほかならない。この方程式を変形してディリクレの積分定理を適用すれば次のような関係式が得られる。

$$f_1(-\frac{b_1}{2}) = T_1 f_1(\frac{b_1}{2}) + L_1 Q_1 \quad \text{——(8)}$$

ここでL_1はT_1と同様にして得られるマトリックスであり，Q_1は強制力の載荷状態によって決定されるマトリックスである。(8)式で$Q_1=0$ならば自由振動となる。ボックスガーダー上面にのみ強制力が作用している場合には，板要素1以外の要素に関しては(4)式がそのまま適用できる。また板要素間の適合条件式(6)はそのまま適用できる。

したがって

$$f_1(\frac{b_1}{2}) = \left[E - P_{12} T_2 P_{23} T_3 P_{34} T_4 P_{41} T_1 \right]^{-1} P_{12} T_2 P_{23} T_3 P_{34} T_4 P_{41} L_1 Q_1 \quad \text{——(9)}$$

$f_1(\frac{b_1}{2})$が決定されれば(8)式から$f_1(-\frac{b_1}{2})$も決定されるのでフーリエ級数の係数が求められる。したがって(2),(3)式から任意点の振動性状を求めればよい。

4. 数値計算

ボックスガーダーの振動性状を明らかにするために以下のような数値をもつボックスガーダーを考え種々の計算を試みた。計算結果は講演会当日に譲る。

($l = 60m$, $b_1 = 4.5m$, $b_2 = 3.0m$, $h_1 = 1.5cm$, $h_2 = 1.3cm$, $\nu = 0.3$, $E = 2.1 \times 10^6 kg/cm^2$, $\rho = 8.07 \times 10^{-6} kg \cdot sec^2/cm^4$)