I-253　　非比例減衰系の動的応答について

京都大学工学部　正員　山田善一
京都大学工学部　正員　○河野健二

1. まえがき

有限要素法を利用した非比例減衰を有する構造系の動的応答解析手法には現在種々のものが用いられている。減衰マトリックスが何らかの方法により対角化可能であれば非減衰時のモーダルマトリックスを利用して応答解析ができるため非常に便利である。運動方程式を直接に解くことは，系の自由度の増加にともない計算時間も急激に増大し，解の収束性や安定性などの問題を生じる。一般に動的応答解析において応答量に及ぼす影響が大きなモードの数は系の自由度に比べれば少ないものである。直接地震波入力による応答解析でも応答スペクトルを利用する場合でも非比例減衰マトリックスの対角化は多くの利点を有する。現在，非比例減衰マトリックスの対角化の手法には種々のものが考えられているが，対角化にともなう応答量の誤差評価とより簡明な対角化の手法が望まれるところである。ここでは Fig.1 に示されているような基礎地盤を含む構造物の動的応答解析を例にとり非比例減衰マトリックスの扱いについて考えてみる。

2. 非比例減衰マトリックスの対角化

構造物の減衰性状を明確に把握し解析上必要な減衰マトリックスを求めることは重要なことであるが，現在のところまだ解明されていない問題である。一般に構造物の振動解析では減衰は経験的に決められていることが多いと思われる。しかし基礎地盤を含む構造物の振動解析では相互作用の問題もあり減衰の決定には多くの問題があるものと考えられている。有限要素法では部分的な減衰の性質を部分的な質量マトリックスや剛性マトリックスに比例した等価なものとして表わすことができれば減衰マトリックスは容易に求めることができる。このようにして減衰マトリックスが求まれば運動方程式は一般に次のような形で表わされる。

$$(1)\qquad [M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\}$$

$[C]$ が非比例減衰マトリックスであるとき，$[C]$ は非減衰時のモーダルマトリックス $[\Phi]$ を用いて対角化できないので次のような形になる。

$$(2)\qquad [I]\{\ddot{\eta}\} + [\tilde{C}]\{\dot{\eta}\} + [\omega_i^2]\{\eta\} = \{f(t)\} \qquad ここに \qquad \{x\} = [\Phi]\{\eta\}$$

いま $[\tilde{C}]$ が対角化され $[\tilde{C}]^D$ となれば応答解析は容易に行なわれることになる。いまそれを次のように表わす。

$$(3)\qquad [I]\{\ddot{\eta}\} + [\tilde{C}]^D\{\dot{\eta}\} + [\diagdown\omega_i^2\diagdown]\{\eta\} = \{f(t)\}$$

対角化の手法の中で簡明なものは $[\Phi]^T[C][\Phi] = [\diagdown 2h_i\omega_i \diagdown]$ として非対角項を無視し対角項のみをとりだし各次モードの減衰定数 h_i を求めるものである。部分的な減衰に大きな違いがない場合や，モード間の連成が生じないような場合には複素固有値解析による減衰定数と比較してみるとよい近似を与えるようである。しかし非対角項を無視することによる応答量の誤差評価は明らかでない。次に対角化の手法として各次モードの重み係数を減衰が異なる部分の歪エネルギーから求め，それぞれ異なる減衰を有する部分の重みつき平均として各次モードの減衰定数を求める方法がある。また各振動モードから重み係数を求めそれぞれ異なる減衰を有する部分の重みつき平均として各次モードの減衰定数を求める方法もある。いずれの場合も異なる部分の減衰係数の与え方には問題があり，求められる各次モードの減衰定数も過大評価されるようである。一般に減衰を有するとき2次の固有値問題として扱えば複素固有値解析を行うことによって各次モードの減衰定数は求めることができる。そしてモード間の連成も含めて扱うことができるが，複素固有値解析は自由度の増大とともに困難がともなう。

しかし自由度が20程度で複雑な減衰機構を有する場合は複素固有値解析も非常に有用なものであると考えられる。次に(2)式と(3)式の応答量が各次振動で一致するように$[\tilde{C}]^P$を決める方法がある。(2)式の周波数伝達関数をj点に関して $\tilde{H}_j(\omega_k)$，(3)式のそれを $H_j(\omega_k)$ として表わすと次のよう

(4) $|\tilde{H}_j(\omega_k)| = |H_j(\omega_k)|$ （ω_k: k次の振動数）

この式は各次振動において任意の点の応答量が一致するように決められているので局所的な減衰定数を与えることになるが $|\tilde{H}_j(\omega_k)|$ の計算が簡単にできれば容易に各次モードの減衰定数を求めることができる。応答量の誤差評価には問題があるが，非比例減衰を有する多自由度系では有用な方法であると思われる。また等価線形化の手法を用いて各次モードの減衰定数を求める方法もある。この場合，外力の形が簡単であれば各次モードの減衰定数の計算も容易になる。同じような方法で$\{\tilde{\eta}\}$と$\{\eta\}$の誤差の一次項のみをとり応答の2乗平均誤差を最小化する方法もある。

(5) $\dfrac{\partial L}{\partial C_k} = 0$　ここに $L = \int_0^t (\{\tilde{\eta}\} - \{\eta\})^T (\{\tilde{\eta}\} - \{\eta\}) dt$

$$\{\tilde{\eta}\} - \{\eta\} = \sum \left(\frac{\partial\{\tilde{\eta}\}}{\partial C_k}\right)_{\{\tilde{\eta}\}=\{\eta\}} \Delta C_k$$

また定常状態であれば $E\{\eta_i \eta_j\} = 0$ などを用いることにより各次モードの減衰定数は次のように表わされる。

(6) $h_i = \dfrac{E[f_i \dot{\eta}_i]}{2\omega_i E[\dot{\eta}_i^2]}$

これらの手法はいずれも外力が比較的簡単な形であるとき有用なものであると考えられる。このように多自由度系の非比例減衰マトリックスの対角化には問題があるが動的応答解析ではモーダルマトリックスの利用と関連してできるだけ簡明な形の対角化が望まれるところである。Fig.1 に示されるような構造では部分的に減衰が異なるとき減衰マトリックスの表わし方により同じように対角化しても各次モードの減衰定数は異ってくる。Table 1 はその例を示したものである。非比例減衰マトリックスの対角化は減衰の評価と応答の評価との関連でその適用性が問題になるものと思われる。

3．あとがき

基礎地盤を含む構造物の動的応答解析では有限要素法を利用すると非比例減衰マトリックスの対角化が必要になる。Fig.1 に示す構造物の動的応答解析を例にとり非比例減衰マトリックスの対角化と応答の評価を試みたのでその結果は当日発表する予定である。

参考文献

1) W.T. Thomson and P. Caravani, "Identification of Damping Coefficient in Multidimensional Linear systems," Journal of App. Mech. June 1974

2) N.C. Tsai, "Modal Damping for Soil-Structure Interaction," ASCE, EM2, April 1974

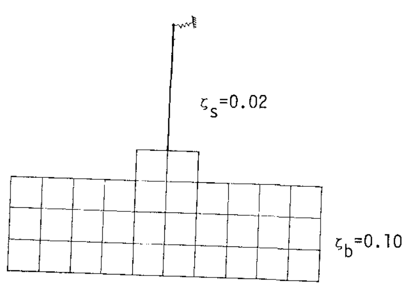

Fig. 1

Mode	ω(rad/sec)	ζ_i(%) [M_c]	ζ_i(%) [K_c]
1	4.991	0.022	0.037
2	9.950	0.026	0.162
3	14.62	0.016	0.305
4	15.64	0.019	0.196
5	20.43	0.012	0.263

Table 1　Damping Constant