# I-247　境界条件および初期条件による梁の振動問題

信州大学　正員　○石 川　清 志
谷 本　勉之助
夏 目　正太郎

1. はじめに.　基礎微分方程式を，与えられた境界条件と初期条件のもとで，連続弾性体の梁の曲げ振動を固有関数法(Eigenfunction Method)で解く方法である．現在，大型電子計算機を十分に利用できるのに伴い，有限要素的手法による解析が非常に発達し，高い成果を上げている．古来，弾性体解析としては，与えられた境界条件および初期条件での単径間梁の問題は詳細に説明されているが，中間支持のある連続梁や，あるいは変断面梁となった弾性体振動問題は解析が非常に複雑に導びかれ，むずかしい問題とされている．また振動問題はほとんどエネルギー法により解析が進められているが，本解析方法はすべて，与えられた境界条件，初期条件で，基礎微分方程式を忠実に解く，いわば微分方程式法である．この微分方程式法が固有関数法である．固有関数法は，静的の２次元弾性問題，あるいは板の曲げ解析に用いられているが，微分方程式の特性，および境界条件により複素解析になる．ところが，梁の曲げ振動問題の固有関数法は微分方程式の特性，および境界条件とから実数解析になる．しかし，手法手続は全く同様に扱われ，解析を進めるに何ら不都合が生じない．従来の梁の曲げ振動問題は，境界条件，および初期条件による単径間梁では，とくに問題は生じないが，連続梁や変断面梁の扱い方法は，各種境界条件における，固有値方程式の振動数による各モードの相対振幅量までで，初期条件の扱い方法についてはあまり知られていない．

2. 基礎式.　強制外力 $q(x,t)$ が作用する振動梁の基礎微分方程式は

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{A\gamma}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=q(x,t). \tag{1}$$

式(1)の解は同次方程式 $w^h$ と特解 $w^p$ との和とする．すなわち

$$w=w^h+w^p. \tag{2}$$

これより

$$EI\frac{\partial^4 w^h}{\partial x^4}+\frac{A\gamma}{g}\frac{\partial^2 w^h}{\partial t^2}=0,\qquad EI\frac{\partial^4 w^p}{\partial x^4}+\frac{A\gamma}{g}\frac{\partial^2 w^p}{\partial t^2}=q(x,t). \tag{3}$$

式(3a)の同次方程式の一般解を $w^h=X(x)T(t)$ とすると

$$w^h=\sum_{n=1}^{\infty}\lfloor \cos\lambda\xi \quad \sin\lambda\xi \quad ch\lambda\xi \quad sh\lambda\xi \rfloor_n N_n^h \begin{bmatrix}\cos\mu t\\ \\ \sin\mu t\end{bmatrix}_n,\quad N_n^h=\begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ B_1 & B_2\\ C_1 & C_2\\ D_1 & D_2\end{bmatrix}. \tag{4}$$

$\mu_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ は円振動数である．$N^h$ は未定積分常数群の固有マトリクス(Eigen Matrix)である．

式(3b)の特解 $w^p$ は強制外力 $q(x,t)$ に影響する．強制外力は一般に，正・余弦波状形の外力として作用させる場合が多い．ここでは $q(x,t)=F\sin pt$ とすると

$$w^p=\left[\lfloor \xi \quad \xi^2 \quad \xi^3 \quad \xi^4+\alpha \rfloor N^p+\beta\right]\sin pt,\quad N^p=\begin{bmatrix}A\\ B\\ C\\ D\end{bmatrix}. \tag{5}$$

式(4)および(5)において，$\xi=\frac{x}{L}$ であり，$N^h$ は境界条件および初期条件で決定される．また $N^p$ は境界条件だけで決定され，$N^p$ が既知になると，$w^p$ は決定され，最終方程式において，荷重項となる．

3．境界条件． 式(4)は梁の自由振動の運動方程式の一般解であって，境界条件や振動数，あるいは振動形態の条件は満していないため，境界条件を満す関数にしなければならない．境界条件処理はまず中間支持のある連続梁，あるいは変断面梁における連続条件から，径間$(r)$と$(r-1)$の間で次の関係がある：

$$\mathbb{N}_r^h=\mathbb{L}_r^h\mathbb{N}_{r-1}, \qquad \mathbb{N}_r^p=\mathbb{L}_r^p\mathbb{N}_{r-1}^p+\mathbb{K}_r, \quad (r=2,3,4,\cdots,R). \tag{6}$$

この関係式をくり返し演算することにより，最終径間(R)，$\mathbb{N}_R$は，才1径間(1)，$\mathbb{N}_1$であらわされる：

$$\mathbb{N}_R^h=\mathbb{G}^h\mathbb{N}_1^h, \qquad \mathbb{N}_R^p=\mathbb{G}^p\mathbb{N}_1^p+\mathbb{K}. \tag{7}$$

系の端における境界条件を$\mathbb{B}$，$\mathbb{B}'$とすると，式(7)より

$$\begin{bmatrix}\mathbb{B}\\ \mathbb{B}'\mathbb{G}\end{bmatrix}\mathbb{N}_1^h=0, \qquad \mathbb{N}_1^p=-\begin{bmatrix}\mathbb{B}\\ \mathbb{B}'\mathbb{G}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \mathbb{K}\end{bmatrix}. \tag{8}$$

境界条件処理をすると，同次方程式における$\mathbb{N}_1^h$は境界条件で完全に決定できないが，境界条件を満す固有値方程式が得られ，各モードの円振動数が求まる：

$$F(\mu)=\begin{vmatrix}\mathbb{B}\\ \mathbb{B}'\mathbb{G}\end{vmatrix}^h=0, \qquad \mathbb{N}_1^h=\mathbb{P}\Omega. \tag{9}$$

式(9b)は式(8a)の関係により，$\mathbb{N}_1^h$の8個の未定積分常数が2個の未定積分常数で表現されたものである．また特解の$\mathbb{N}_1^p$は境界条件で完全に決定され［式(8b)］，．各径間における特解の振幅$\omega_r^p$は完全に決定される．
以上により，境界条件を満す振幅関数$\omega_r^h$，および$\omega_r^p$は

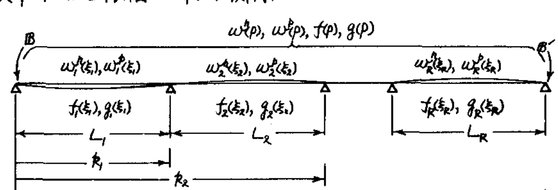
$$\omega_r^h=\sum_{n=1}^{\infty}\lfloor\cos\lambda\xi\ \ \sin\lambda\xi\ \ ch\lambda\xi\ \ sh\lambda\xi\rfloor\mathbb{L}_r^h\mathbb{P}\lfloor\cos\mu t\ \ \sin\mu t\rfloor\Omega_n, \quad \omega_r^p=[\lfloor\xi\ \ \xi^2\ \ \xi^3\ \ \xi^4+\alpha\rfloor(\mathbb{L}_r^p\mathbb{N}_1+\mathbb{K}_r)+\beta]\sin pt. \tag{10}$$

4．初期条件． 初期条件は系全体にわたっての全体座標変数$\rho$であらわすと

$$\begin{bmatrix}\omega(\rho)\\ \dfrac{\partial\omega(\rho)}{\partial t}\end{bmatrix}_{t=0}=\begin{bmatrix}f(\rho)\\ g(\rho)\end{bmatrix}, \quad \text{または} \quad \begin{bmatrix}\omega(\rho)\\ \dfrac{\partial\omega(\rho)}{\partial t}\end{bmatrix}_{t=0}^h+\begin{bmatrix}\omega(\rho)\\ \dfrac{\partial\omega(\rho)}{\partial t}\end{bmatrix}_{t=0}^p=\begin{bmatrix}f(\rho)\\ g(\rho)\end{bmatrix}. \tag{11}$$

関数$f(\rho)$および$g(\rho)$はそれぞれ初期変位および初期速度であり，変数$\rho$であらわされた既知関数である．
各径間の部材座標変数$\xi_r$による振幅$\omega_r(\xi)$と，全体座標変数$\rho$による振幅$\omega(\rho)$の関係は

$$\omega^h(\rho),\omega^p(\rho),f(\rho),g(\rho)=\begin{cases}\omega_1^h(\xi_1),\ \omega_1^p(\xi_1),\ f_1(\xi_1),\ g_1(\xi_1),\ (0\leq\rho\leq k_1),\\ \omega_2^h(\xi_2),\ \omega_2^p(\xi_2),\ f_2(\xi_2),\ g_2(\xi_2),\ (k_1\leq\rho\leq k_2),\\ --\quad --\quad --\quad --\quad (--),\\ \omega_R^h(\xi_R),\ \omega_R^p(\xi_R),\ f_R(\xi_R),\ g_R(\xi_R),\ (k_{R-1}\leq\rho\leq 1),\end{cases}$$




であるから，変数$\xi_r$を全体座標変数$\rho$に変換し，$\omega(\rho)$は便宜次のようなフーリエ級型の関数に設定する：

$$\omega^h(\rho)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}\lfloor\cos\mu t\ \ \sin\mu t\rfloor\Omega_n\sin m\pi\rho, \quad \omega^p(\rho)=\sum_{m=1}^{\infty}b_m\sin pt\sin m\pi\rho, \quad \begin{bmatrix}f(\rho)\\ g(\rho)\end{bmatrix}=\sum_{m=1}^{\infty}\begin{bmatrix}f_m\\ g_m\end{bmatrix}\sin m\pi\rho. \tag{12}$$

最終方程式は式(11)から

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}\begin{bmatrix}\cos\mu t & \sin\mu t\\ -\mu\sin\mu t & \mu\cos\mu t\end{bmatrix}_{t=0}\Omega_n+\sum_{m=1}^{\infty}b_m\begin{bmatrix}\sin pt\\ p\cos pt\end{bmatrix}_{t=0}=\sum_{m=1}^{\infty}\begin{bmatrix}f_m\\ g_m\end{bmatrix}. \tag{13}$$

5．まとめ． 強外力$q(x,t)=0$とすると自由振動解析となり，初期変位，あるいは初期速度を与えられた自由振動の波動伝播になり，とくに初期速度を与えると，衝撃振動になると思われる．通常知られている振動解析は振動数を求め，これらに対する各モードの相対量までであるが，本解析はさらに進めて任意時刻における絶対量を得る．