

熊本大学 正員 平井一男  
 ‘ ‘ 水田洋司  
 ‘ ‘ 学生員 古賀洋治

はじめに.

減衰効果あるいは弾塑性効果を付加外力として、非減衰線形振動方程式に導入し解析を試みようとするものである。従って、減衰振動では、非減衰振動方程式に減衰力に相当する付加外力を、弾塑性振動では剛性変化に相当する付加外力を作用させる。

理論.

多質点系の強制振動による応答を逐次積分法で求める場合の $n$ 時点での運動方程式は、

$$M\ddot{w}_n + K w_n = F_n \quad (1)$$

ここに、 $M$ : 質量マトリックス,  $K$ : 剛性マトリックス,  $w_n$ : 変形ベクトル,  $F_n$ : 外力ベクトル

(1)式を線形加速度法を用いて解くと、

$$\ddot{w}_n = A F_n - B \quad (2a)$$

$$\dot{w}_n = D + a \dot{w}_n = a A F_n - a B + D \quad (2b)$$

$$w_n = E + b \dot{w}_n = b A F_n - b B + E \quad (2c)$$

ここに、 $A = (M + \frac{h^2}{6} K)^{-1}$ ,  $B = (M + \frac{h^2}{6} K) \cdot K \cdot (w_{n-1} + h \dot{w}_{n-1} + \frac{h^2}{2} \ddot{w}_{n-1})$ ,  $D = \dot{w}_{n-1} + \frac{h}{2} \ddot{w}_{n-1}$

$E = w_{n-1} + h \dot{w}_{n-1} + \frac{h^2}{2} \ddot{w}_{n-1}$ ,  $a = \frac{h}{2}$ ,  $b = \frac{h^2}{6}$ ,  $h$ : 時刻 $n$ の付加外力  $F_n + \Delta F_n$  が作用した時の運動方程式とその解は、(1)式、(2)式より

$$M \ddot{w}_n + K w_n = F_n + \Delta F_n \quad (3)$$

$$\ddot{w}_n = A (F_n + \Delta F_n) - B \quad (4a)$$

$$\dot{w}_n = a A (F_n + \Delta F_n) - a B + D \quad (4b)$$

$$w_n = b A (F_n + \Delta F_n) - b B + E \quad (4c)$$

### 1. 減衰振動

減衰振動方程式は、減衰マトリックス  $C$  を用いて次式のように表わせる。

$$M \ddot{w}_n + K w_n = F_n - C \cdot \dot{w}_n \quad (5)$$

(3)式、(5)式の比較より

$$\Delta F_n = -C \cdot \dot{w}_n \quad (6)$$

と同等様に、 $\Delta F_n$  を定める事ができるから、(4)式を用いて減衰振動を解くことができる。この $\Delta F_n$ は、(4)式、(6)式の関係より導くことができる。

$$\Delta F_n = -(I + a C \cdot A)^{-1} \cdot C \cdot (a A F_n - a B + D) \quad (7)$$

### 2. 弾塑性振動

図-1に示す様な bi-linear 型復元力特性をもつ材料の塑性域 (AB 区間) での運動方程式は、

$$M \ddot{w}_n + K w_n = F_n - \Delta K \cdot (w_n - w_k) \quad (8)$$

(3)式、(8)式の比較より

$$\Delta F_n = -\Delta K \cdot (w_n - w_k) \quad (9)$$

を満足する様に、 $\Delta F_n$  を定めることができる。弾性域での応答計算式(4)式を用いて、塑性域での応答を求める

ことができる。この式で  $\Delta F_n$  は、(4c)式との関係より定めることができる。

$$\Delta F_n = -(I + \delta \Delta K A)^{-1} \Delta K (\delta A F_n - \delta B + E - \bar{D}_e) \quad (10)$$

ここに、 $\bar{D}_e$  : A点(図-1)での変形量

(7)式・(10)式中の減衰マトリックス  $C$  あるいは、剛性マトリックス変化  $\Delta K$  が零要素を多く含むマトリックスならば、それぞれその縮合マトリックス  $\bar{C}$ 、 $\Delta \bar{K}$  を用いて、付加外力は次式の様に表わされる。

$$\Delta \bar{F}_n = -(I + a \bar{C} \bar{A})^{-1} \bar{C} (a \bar{A} F_n - a \bar{B} + \bar{D}) \quad (7')$$

$$\Delta \bar{F}_n = -(I + \delta \Delta \bar{K} \bar{A})^{-1} \Delta \bar{K} (\delta \bar{A} F_n - \delta \bar{B} + \bar{E} - \bar{D}_e) \quad (10')$$

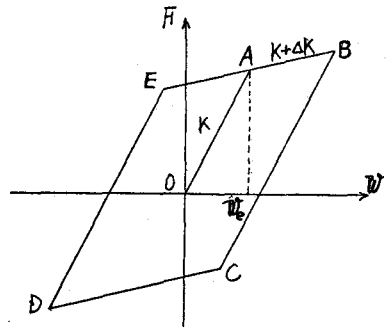


図-1. bi-linear型復元力特性

### 数値計算例

図-2に示す1質点-バネ系のモデルを用いて、弾塑性解析を試みた。復元力特性は図-1に示す bi-linear型ではなく、便宜上図-3に示す様なものを使用した。表-1には図-2のモデルの諸元を、図-5には本法と別法との応答の比較を示している。また、外力は図-4に示す step-function 状のものを作用させた。

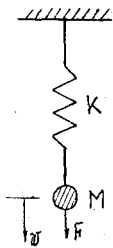


図-2. 1質点-バネ系

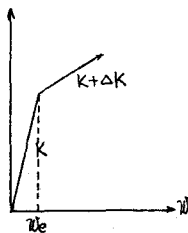


図-3. 復元力特性

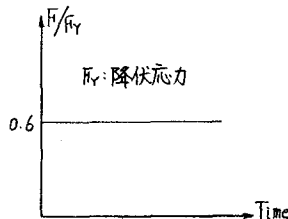
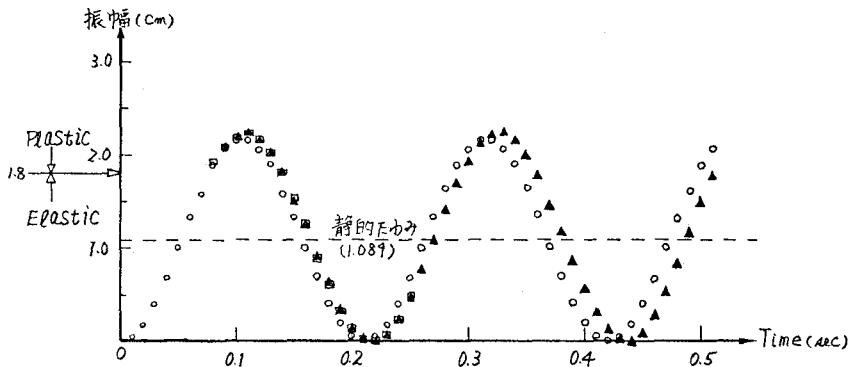


図-4. 外力

諸元		
バネの剛さ	弾性域	9000 Kg/m
	塑性域	4500 Kg/m
質量		10 Kg m <sup>2</sup> /m
外力		18 Kg

表-1. モデルの諸元



- Elastic Response (L.A.M)
- △ Elasto-Plastic Response (本法, L.A.M)
- ▲ Elasto-Plastic Response By Stiffness Modified Method (L.A.M)
- ◻ Elasto-Plastic Response (厳密解)

図-5. レスポンスの比較

[注]

(1) 平井 水田, 「付加外力による応力集中・弾塑性応答の解析手法について」 西日本構造解析研究会資料 S201