I-245 Müller-Breslauの原理の動的問題への適用

熊本大学 正員 平井一男
〃 〃 ○水田洋司

はじめに.

前報[1,2]では、支点を不動点から可動点へ変更した場合の問題を、Müller-Breslau の原理を用いて処理する方法を、静的問題・動的問題について述べた。ここでは、構造物が基礎に強制変位を受ける場合にも、Müller-Breslau の原理を用いて解けることを示す。

理論.

Müller-Breslau の原理によれば、図-1の単純梁において、支点(b)が変位(δ_b)した時の任意の点(x_i)のたわみは、任意点(x_i)にδ_bなる荷重を作用させた時の支点(b)の反力に等しい。従って、支点反力の影響線が求まっていれば、基礎が強制変位した時の応答を簡単に求めることができる。

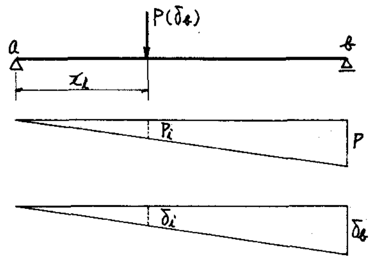


図-1.支点bの反力の影響線

1.静的問題

図-1の系の支点bの反力の影響線は、有限要素法によれば

$$\mathbb{F}_{bI} = -\mathbb{f}\cdot\mathbb{K}_{21}^{T} \qquad (1)$$

ここに、$\begin{Bmatrix}\mathbb{F}\\ \hline \mathbb{F}_b\end{Bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c}\mathbb{K}_{11} & \mathbb{K}_{12}\\ \hline \mathbb{K}_{21} & \mathbb{K}_{22}\end{array}\right]\begin{Bmatrix}\mathbb{W}\\ \hline \mathbb{W}_b\end{Bmatrix}$ --- 支点bを含んだ形，$\mathbb{f}=\mathbb{K}_{11}^{-1}$

任意点(x_i)に外力Pが作用した時の支点反力は、(1)式を用いて

$$\mathbb{F}_b = \mathbb{F}_{bI}^{T}\cdot\mathbb{F} = -\mathbb{K}_{21}\cdot\mathbb{f}\cdot\mathbb{F} \qquad (2)$$

ここに、$\mathbb{F}=[0,\ \overset{i}{P},\ 0]$，$i$要素のみにPなる値をもち他の要素は零

また支点bがδ_bだけ沈下した時のx_i点の変位δ_iは、x_i点にδ_bの荷重を作用させた時の支点反力に等しい。式で表わせば、

$$\delta_i = -\mathbb{K}_{21}\cdot\mathbb{f}\cdot\mathbb{F} \qquad (3)$$

ここに、$\mathbb{F}=[0,\ \delta_b,\ 0]$，$i$要素のみに$\delta_b$なる値をもち他の要素は零

それ故、基礎変形による基礎以外の変形$\mathbb{W}$は、

$$\mathbb{W} = -\mathbb{K}_{21}\cdot\mathbb{f}\cdot\delta_b \qquad (4)$$

2.動的問題

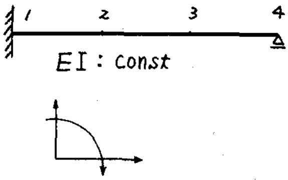
基礎に動的強制変形を受けた場合にも、静的問題の場合と同様な考えで、問題を処理できる。(4)式の$\mathbb{f}$の代わりに、動的撓性マトリックス$\mathbb{f}_d$を用いて、基礎変形による動的応答は、次式の様に書ける。

$$\mathbb{W}_d = -\mathbb{K}_{21}\cdot\mathbb{f}_d\cdot\delta_b \qquad (5)$$

一般に、(5)式の$\mathbb{K}_{21}$は零要素を多く含むため、$\mathbb{f}_d$の全要素を使用する必要はない。零要素を取り除き縮合された$\mathbb{K}_{21}$を$\overline{\mathbb{K}}_{21}$と表わすと、それに対応して$\mathbb{f}_d$も$\overline{\mathbb{f}}_d$と表わせる。例えば、$\delta_b = X\cdot\sin\omega t$なる基礎変形を受けた時の定常状態での$\overline{\mathbb{f}}_d$の$(i,j)$要素は次式で表わされる。

$$\overline{f_d}(i,j)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\omega_n^2-\omega^2}\cdot\Phi_n(x_i)\cdot\Phi_n(x_j) \qquad (6)$$

ここに，N: 全自由度数，ω_n: n次の固有振動数，$\Phi_n(x)$: n次の固有モード



図−2

計算例.

1.静的問題

図-2に示す梁の支点4が$\delta=-1$だけ強制変位した時の変形を求める。

$$K_{11}=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix}24&0&-12&-6&0\\0&8&6&2&0\\-12&6&24&0&-6\\-6&2&0&8&2\\0&0&-6&2&4\end{bmatrix} \qquad \overline{K}_{21}=\frac{EI}{L^3}\left[-12\ 6\ 6\right]$$

(1)式より支点4の反力の影響線は　$F_{4I}=[0.14181,\ -0.27777,\ 0.51852,\ -0.44444,\ -0.50000]$

(4)式より基礎変形による変形は　$w^T=[-0.14181,\ 0.27777,\ -0.51852,\ 0.44444,\ 0.50000]$　(a)

一般的手法による解

$w'=-f\cdot K_{12}\delta$ より　$w'^T=[-0.14181,\ 0.27777,\ -0.51852,\ 0.44444,\ 0.50000]$　(b)

2.動的問題

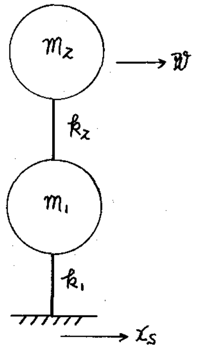
図-3に示す簡単な2質点−バネ系を例にとり、一般的手法との比較を行なう。図-3において$k_1=k_2=k$, $m_1=m_2=m$, $x_s=\sin\omega t$ とする。

$$K_{11}=\begin{bmatrix}2k&-k\\-k&k\end{bmatrix} \qquad \overline{K}_{21}=[-k]$$

(5)式より

$$w_d=-[-k]\begin{bmatrix}f_{d11}\\f_{d21}\end{bmatrix}\cdot x_s$$

$$=k\sum_{n=1}^{2}\frac{\Phi_n(1)}{\omega_n^2-\omega^2}\begin{bmatrix}\Phi_n(1)\\\Phi_n(2)\end{bmatrix}\cdot\sin\omega t \qquad (C)$$



図−3. 2質点−バネ系

一般的手法による解

$M\ddot{w}+K(w-w_s)=0$, 変形して $M\ddot{w}+Kw=Kw_s$，ここに $w_s=x_s\{1\}$

上式をモーダル·アナリシスにより解く。質点rの応答は、

$$w_r=\sum_{n=1}^{N}\left\{\frac{1}{\omega_n^2-\omega^2}\Phi_n(r)\cdot\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}\Phi_n(i)\cdot K_{ij}\right)\right\}\sin\omega t$$

従って，

$$w_1=\sum_{n=1}^{2}\frac{1}{\omega_n^2-\omega^2}\cdot\Phi_n(1)\{\Phi_n(1)\cdot(2k-k)+\Phi_n(2)(-k+k)\}\sin\omega t=k\sum_{n=1}^{2}\frac{1}{\omega_n^2-\omega^2}\Phi_n(1)\cdot\Phi_n(1)\sin\omega t$$

$$w_2=\sum_{n=1}^{2}\frac{1}{\omega_n^2-\omega^2}\Phi_n(2)\{\Phi_n(1)(2k-k)+\Phi_n(2)(-k+k)\}\sin\omega t=k\cdot\sum_{n=1}^{2}\frac{1}{\omega_n^2-\omega^2}\Phi_n(1)\cdot\Phi_n(2)\sin\omega t$$

故に，

$$w_d=k\sum_{n=1}^{2}\frac{\Phi_n(1)}{\omega_n^2-\omega^2}\cdot\begin{bmatrix}\Phi_n(1)\\\Phi_n(2)\end{bmatrix}\cdot\sin\omega t \qquad (d)$$

本法と一般手法による解は(a)と(b)，(c)と(d)に見る様に一致する。

[参考文献]

1. 平井·水田，「Müller−Breslauの原理による境界条件の変更」 西部支部講演会 S50.2
2. 平井·水田，「境界条件の変更(不動点より可動点)に関する解析手法」 第29回年次学術講演会 S49.10