I-242 積分方程式法による平板の固有振動の解析について

京都大学工学部 正会員 丹羽義次
京都大学工学部 正会員 小林昭一
京都大学大学院 学生員 ○岡野伸一

平板の固有振動の問題は(1)式を基礎方程式として有する線型境界値問題に帰着される。現状では，一般的な解法はほとんど知られていないようであり，亦，最小の固有値以外は計算できないようである。
ここでは任意形状の平板について，種々の線型な境界条件に対して適用でき得る一般的な解法として積分方程式法を取り上げて検討した。

1. 積分方程式への定式化

平板の固有振動に対する基礎方程式は次のように変形される。

$$(\Delta^2-\lambda^4)u=0 \qquad ; \quad \Omega \qquad (1)$$

境界条件は次のようである。

$$l_i u=0 \qquad ; \quad \partial\Omega \quad , \quad i=1,2 \qquad (2)$$

ここで Ω は平板の占める領域を，l_1, l_2 は次に示される境界オペレータによって与えられる。

$$\lim_{M\to P_0} \qquad ; \quad P_0\in\partial\Omega \qquad (3)$$

$$\lim_{M\to P_0}\frac{d}{dn} \qquad ; \quad P_0\in\partial\Omega \qquad (4)$$

$$\lim_{M\to P_0}[\Delta-(1-\nu)\frac{d^2}{ds^2}] \qquad ; \quad P_0\in\partial\Omega \qquad (5)$$

$$\lim_{M\to P_0}\frac{d}{dn}\Delta+(1-\nu)\frac{d}{ds}\lim_{M\to P_0}\frac{d}{dn}\frac{d}{ds} \qquad ; \quad P_0\in\partial\Omega \qquad (6)$$

但し，n は境界 $\partial\Omega$ の外向き単位法線，s は n に対応する単位接線，ν はポアソン比である。
ここで，式(3)と式(4)は固定支承，式(3)と式(5)は単純支承，式(5)と式(6)は自由端に対応する。
式(1)の基礎解を G とすれば，G は

$$(\Delta^2-\lambda^4)G(M,P)=\delta(M-P) \qquad ; \qquad \delta:\text{Dirac の }\delta\text{関数}$$

更に，解の唯一性を保つために次の Sommerfeld の条件を満足せねばならない。

$$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{d}{dr}G-i\lambda G\right)=O(r^{-3/2})$$

従って G は次のように定まる。

$$G=(i/8\lambda^2)[H_0(\lambda r)-H_0(i\lambda r)] \qquad (7)$$

但し，$H_0(z)$ は第一種 Hankel 関数であり，r は点 P と点 M の間の距離である。
微分方程式系(1)，(2)は次の積分方程式系(8)，(9)と同値である。

$$u(M)=(-1)^{q_1}\int_{\partial\Omega}\mu_1(P)\frac{d^{q_1}}{dn^{q_1}(P)}G(M,P)\,d\Gamma(P)$$
$$+(-1)^{q_2}\int_{\partial\Omega}\mu_2(P)\frac{d^{q_2}}{dn^{q_2}(P)}G(M,P)\,d\Gamma(P) \qquad ; \quad 0\le q_1<q_2\le 3 \qquad (8)$$

但し，$d^{q}/dn^{q}(P)$ は P についての微分を意味する。ここで，μ_1, μ_2 が未知関数であり，これらは次の境界条件から定まる。

$$\lim_{M \to P_0} l_i \left[(-1)^{q_1} \int_{\partial\Omega} \mu_1(P) \frac{d^{q_1}}{dn^{q_1}(P)} G(M, P)\, d\Gamma(P) \right.$$

$$\left. + (-1)^{q_2} \int_{\partial\Omega} \mu_2(P) \frac{d^{q_2}}{dn^{q_2}(P)} G(M, P)\, d\Gamma(P) \right] = 0 \quad ; P_0 \in \partial\Omega \,, \; i = 1, 2 \qquad (9)$$

ここで，(9)式にGのn方向3階微分が表われれば極限値は次の値に収束する。

$$-\frac{\mu(P_0)}{2} + (-1)^{q} \int_{\partial\Omega} \mu(P) \frac{d^{q}}{dn^{q}(P)} G(M, P)\, d\Gamma(P) \qquad ; P_0 \in \partial\Omega$$

(9)式はλをパラメータとして含み，λが固有値であるときにのみ$\mu(P) \neq 0$，$(P \in \partial\Omega)$なる解が存在する。

2. 数値解析法

(9)式を解析的に解くことは非常に困難であるが，以下に述べる方法によれば適当な次数の固有値まで容易に計算できる。境界$\partial\Omega$をn個の要素に分割し，その要素をΓ_i，$(i = 1, 2, \cdots, n)$とし，各要素の中心をP_iとする。要素Γ_iに対してμ_1, μ_2を定数μ_{1i}, μ_{2i}で近似できると仮定すれば，(9)式は次に示す$2n$元線型連立方程式になる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^{(1)} \mu_{1j} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^{(2)} \mu_{2j} &= 0 \qquad ; \quad i = 1, 2, \cdots, n \\ \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}^{(1)} \mu_{1j} + \sum_{j=1} \beta_{ij}^{(2)} \mu_{2j} &= 0 \qquad ; \quad i = 1, 2, \cdots, n \end{aligned} \right\} \qquad (10)$$

但し，

$$\alpha_{ij}^{(1)} = \lim_{M \to P_i} l_1 \left[(-1)^{q_1} \int_{\Gamma_j} \frac{d^{q_1}}{dn^{q_1}(P)} G(M, P) \right]$$

$$\alpha_{ij}^{(2)} = \lim_{M \to P_i} l_1 \left[(-1)^{q_2} \int_{\Gamma_j} \frac{d^{q_2}}{dn^{q_2}(P)} G(M, P) \right]$$

$$\beta_{ij}^{(1)} = \lim_{M \to P_i} l_2 \left[(-1)^{q_1} \int_{\Gamma_j} \frac{d^{q_1}}{dn^{q_1}(P)} G(M, P) \right]$$

$$\beta_{ij}^{(2)} = \lim_{M \to P_i} l_2 \left[(-1)^{q_2} \int_{\Gamma_j} \frac{d^{q_2}}{dn^{q_2}(P)} G(M, P) \right]$$

(10)式の係数行列Aの各成分は一般的に複素数であるから，この実数部からなる行列をRA，虚数部からなるそれをiIAとすれば，すなわち　$A = RA + iIA$

(10)式が$\mu_{1j} = \mu_{2j} = 0$，$(j = 1, 2, \cdots, n)$でない解を持つためには次の式が成立すれば十分である。

$$|RA| = 0 \qquad , \qquad |IA| = 0 \qquad (11)$$

RA，IAはλのみをパラメータとして有し，固有値λは式(11)の根として得られ，板の振動数fは次の式により定まる。

$$f = \sqrt{gD/\rho h} \cdot \lambda^2 / 2\pi \qquad (12)$$

ここで，gは重力加速度，Dは板の曲げ剛性，ρは板の密度，hは板厚である。

解析例等は講演時に報告する。