

# 吊橋の振動解析に関する二、三の考察

大阪大学工学部 正員 前田幸雄

大阪大学工学部 正員 林 正

大阪大学大学院 学生員 〇 前田研一

1. まえがき 本文では、まず、任意支持形式の多径間非対称吊橋の面内振動解析のための新たな簡易試算計算法が、撓度理論<sup>1)</sup>に基づいて、説明、提案される。なお、この方法では、補剛桁の橋軸方向縦振動、および、センター・タイの影響<sup>2)</sup>も、もちろん、考慮されている。また、より厳密な方法としての有限変形理論<sup>3)</sup>による解析法も、同時に説明される。そして、両者の方法を各種計算例に適用した結果が検討される。

## 2. 撓度理論による解析法

2.1. 補剛桁の橋軸方向変位が拘束されている場合の振動数方程式 補剛桁の曲げ剛性、分布死荷重が、近似的に各径間において等分布である  $n$  径間の非対称吊橋を考える。種別化撓度理論に対応する橋たわみ振動の基礎微分方程式から、円振動数  $\omega$  として、第  $i$  径間の横たわみ振動モード  $\eta_i(x_i)$  ( $i=1 \sim n$ ) は

$$\eta_i(x_i) = A_i \cdot \cos \mu_i \frac{x_i}{L_i} + B_i \cdot \sin \mu_i \frac{x_i}{L_i} + C_i \cdot \cosh \lambda_i \frac{x_i}{L_i} + D_i \cdot \sinh \lambda_i \frac{x_i}{L_i} + \frac{g}{\omega^2 H_w} h_i \quad (1)$$

なる式で与えられる。ここに、 $L_i, H_w, h_i$  はそれぞれ、径間長、全死荷重時のケーブル水平張力、慣性力によるケーブル付加水平張力であり、また、 $\mu_i, \lambda_i$  は断面諸量、および、 $\omega$  によって、決定される量である。そして、積分定数  $A_i, B_i, C_i, D_i$  は、次式で示される境界条件式、

左端支持点  $\eta_i(0) = 0, EI_i \cdot \eta_i'(0) = 0,$

中間支持点  $\eta_{i-1}(L_{i-1}) = 0, \eta_{i-1}'(L_{i-1}) = \eta_i'(0), EI_{i-1} \cdot \eta_{i-1}''(L_{i-1}) = EI_i \cdot \eta_i''(0), \eta_i(0) = 0,$  -連続条件-  
 あるいは、 $\eta_{i-1}(L_{i-1}) = 0, EI_{i-1} \cdot \eta_{i-1}''(L_{i-1}) = 0, \eta_i(0) = 0, EI_i \cdot \eta_i'(0) = 0,$  -単純支持-

右端支持点  $\eta_n(L_n) = 0, EI_n \cdot \eta_n''(L_n) = 0,$

によって決定される量である。ただし、(1)式から明らかのように、上式には、双曲線関数の項が含まれるため、径間長  $L_i$  の値がある程度以上にになると、その項のみが卓越し、非常に不安定な解式となる恐れがあり、注意しなければならない。その場合には、その径間は数径間に分割され、隣接区間との連続条件式、

$$\eta_{i,j-1}(L_{i,j-1}) = \eta_{i,j}(0), \eta_{i,j-1}'(L_{i,j-1}) = \eta_{i,j}'(0), EI_{i,j-1} \cdot \eta_{i,j-1}''(L_{i,j-1}) = EI_{i,j} \cdot \eta_{i,j}''(0), EI_{i,j-1} \cdot \eta_{i,j-1}'''(L_{i,j-1}) = EI_{i,j} \cdot \eta_{i,j}'''(0) \quad (3)$$

が境界条件式として、新たに加之される必要がある。従って、この分割点の総数を  $k$  とすると、(2), (3)式で与えられる境界条件式、さらに、各径間において成立するケーブル方程式は

$$H \cdot \alpha = D \cdot h, \quad G \cdot \alpha = E \cdot h \quad [H: 4(n+k) \times 4(n+k), D: 4(n+k) \times n, G: n \times 4(n+k), E: n \times n] \quad (3)$$

なる行列表示で、それぞれ、表現される。ここに、 $\alpha, h$  はそれぞれ、 $4(n+k)$ 個の積分定数、各径間において異なる  $n$ 個の付加水平張力を要素とするベクトルである。故に、両式から  $h$  を消去すれば、 $\alpha$  に関する同次方程式が得られ、Cramer's ruleから、

$$\det / H - D \cdot E^{-1} \cdot G / = 0 \quad (4)$$

なる振動数方程式が  $\omega$  に對する超越方程式として求められる。なお、もし、特に対称吊橋である場合には、モードの対称、非対称条件から、未知積分定数、未知付加水平張力の個数が減ぐられ、上式の各行列は

$$[H: 2(n+k) \times 2(n+k), D: 2(n+k) \times n, G: n \times 2(n+k), E: n \times n] \quad (5)$$

なる大きさになることは言うまでもない。

2.2. 補剛桁の橋軸方向縦振動、および、センター・タイの影響 (4)式で与えられる振動数方程式の解  $\omega$  は、当然、補剛桁の橋軸方向縦振動、および、センター・タイの影響を考慮に入れなければならない。かくは、これらの影響は非常に大であり、無視することはできない。そこで、次のような仮定、

[1] 横たわみ振動モード  $\eta_i(x_i)$  ( $i=1 \sim n$ ) は、補剛桁の橋軸方向縦振動、センター・タイに影響されない。

[2] 補剛桁の橋軸方向縦振動  $\varphi_s$  は 補剛桁全長にわたって、一定である。

[3] センター・タイが存在する場合には、 $\varphi_s$  は 横たわみ振動によるケーブル水平移動量  $\varphi_{c_i}(x_i)$  のタイの位置での値と等量の変位である。

を用いて、エネルギー最小原理に基く、Rayleigh-Ritz法により、 $\omega$ が補正されることになる。

このエネルギー法において、運動エネルギー、位置エネルギーの最大値  $T, V$  は 仮定[1], および[2]から、

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega^2}{g} \sum_{i=1}^n \{ w_i \int_0^{L_i} \eta_i^2(x_i) dx_i + w_{s_i} \cdot \varphi_s^2 \cdot L_i \}, \\ V &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \{ E I_i \int_0^{L_i} \eta_i'^2(x_i) dx_i - H \omega \int_0^{L_i} \eta_i''(x_i) \cdot \eta_i(x_i) dx_i + \frac{W_i}{H \omega} \cdot h_i \cdot \int_0^{L_i} \eta_i(x_i) dx_i \\ &\quad + w_{s_i} \int_0^{L_i} \{ (\varphi_s - \varphi_{c_i}(x_i)) / f_i(x_i) \} dx_i \}, \end{aligned} \right\} (6)$$

なる式で与えられる。ここに、 $w_i, w_{s_i}, E I_i, f_i(x_i)$  は それぞれ、その径間の分布全死荷重、補剛桁死荷重および、ケーブルと補剛桁間の鉛直距離を表わす関数である。故に、エネルギー最小原理を適用するために、上式の  $\eta_i(x_i)$  を  $\alpha \cdot \varphi_i(x_i)$  に、従って、 $\varphi_{c_i}(x_i), h_i$  を、それぞれ、 $\alpha \cdot \varphi_{c_i}(x_i), \alpha \cdot h_i$  に置き換えると、

$$\partial(T-V)/\partial\alpha = 0, \quad \partial(T-V)/\partial\varphi_s = 0, \quad (7)$$

なる条件式から、 $\alpha, \varphi_s$  に関する同次方程式が得られる。その結果、Cramer's ruleにより、円振動数の二乗  $\omega^2$  に関する二次方程式が求められ、従って、 $\omega$ の正根、および、それに対応する  $\varphi_s/\alpha$  の値が 最大二種類与えられる。すなわち、同じ横たわみ振動モードでありながら、補剛桁の橋軸方向縦振動の異なる、そして、当然、円振動数の異なる二種類の固有振動が存在することと考えられる。

一方、さらに、センター・タイを有する場合には、仮定[3]から、 $\varphi_s$  が定数となり、(7)式の最初の条件式のみにより、同様に、今度は  $\omega$ に関する一次方程式が得られる。従って、この場合には、 $\omega$ の正根、および、それに対応する  $\varphi_s/\alpha$  の値は ただ一種類存在するのみである。

3. 有限変形理論による解析法 吊橋の各径間において、補剛桁の剛性は変化するが、分布死荷重は 近似的に等分布であるとし、その結果、ケーブルは 全死荷重時に、放物線形状をとるものとする。従って、さらに、その時、塔が直立するという条件を加えると、ケーブル、ハンガー、および、塔の軸力分布は要易に計算され、逆算によって、各部材の無応力長、そして、初期軸歪  $\epsilon_0$  が決定される。故に、これらの量を用いれば、全死荷重時の補剛桁無応力状態の条件を満足する固有値問題が 全体構造系について、次式のように得られる。

$$\det / \|K(\epsilon_0) - \omega^2 M\| = 0, \quad (8)$$

ここに、 $K(\epsilon_0), M$  は それぞれ、全体構造系での撓線剛性マトリクス、質量マトリクスである。

#### 4. 数値計算例 南備瀬戸大橋(260-1100-260m) 計画設計断面を基礎に(た、各種計算例の結果が示される。

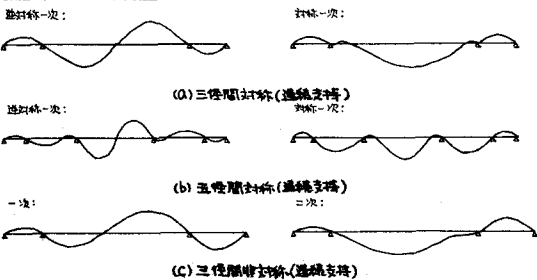


図-1. 撓線理論による各種吊橋の橋たわみ振動モード

表-1. 三径間吊橋(連続支持)の固有周波数と補剛桁縦振動の過渡率

振動モード	補剛桁の補剛率の比率		橋軸方向拘束		センター・タイ	
	固有周波数	過渡率	固有周波数	過渡率	固有周波数	過渡率
撓線一次	7.38 <sub>SEC</sub>	0.0	8.30 <sub>SEC</sub>	+0.79*	7.60 <sub>SEC</sub>	+0.21*
			6.31 <sub>SEC</sub>	-0.60*		
対称一次	5.65 <sub>SEC</sub>	0.0	5.65 <sub>SEC</sub>	0.0	5.65 <sub>SEC</sub>	0.0
高次振動	7.40 <sub>SEC</sub>	0.0	8.41 <sub>SEC</sub>	+0.77*	7.67 <sub>SEC</sub>	+0.21*
			6.40 <sub>SEC</sub>	-0.61*		
対称一次	5.80 <sub>SEC</sub>	0.0	5.77 <sub>SEC</sub>	0.0	5.77 <sub>SEC</sub>	0.0

\* ケーブルの水平移動と同方向を +、逆方向を - の符号で表す。

5. まとめ 数値計算例の結果から、本文で説明された両解析法を併用すれば、より合理的な吊橋の動的設計が可能であると思われる。なお、計算には、NEAC 2200-700 (大橋大学大型計算機センター)を用いた。

1) Bleich F. et al.: "The Mathematical Theory of Vibration in Suspension Bridges" U.S. Gov. (1950), 2) Chaudhury N.K. et al.: "Analysis of Vertical Flexural Oscillations of Suspension Bridges by Digital Computer" Int. Sympo. on Susp. Br. (1966), 3) 倉田 茂: "ケーブルによる吊橋のたわみ振動の制御について" 土木学会論文報告集 No. 142 (1967), 4) 林 保典: "吊橋の振動解析" 第28回土木学会年次学術講演会 (1973), 5) 前田 林 前田 三浦: "吊橋の固有振動解析法" 昭和50年度関西支部年次学術講演会 (1975).