

東京大学工学部 正員 久保喜延
〃 〃 〃 宮田利雄
〃 〃 〃 伊藤 学

まえがき

吊橋のような線状構造物の耐風安定性は種々の手法によって検討されてきているが、この種の構造物の形状は複雑であるために、その耐風性を解析的に評価することは困難であり、もっぱら実験的検討に頼っている。その実験方法には、部分模型を用いることによって構造物全体の挙動を推察できるとする部分模型実験と、全体模型を用いることによって始めて構造物全体の挙動を知ることのできるという全体模型実験とがある。しかし、これら両者の手法の間の相関性について詳しく議論された例はほとんど見当らない。構造物に作用する非定常空気力の振幅に対する線形性を仮定し、strip theoryを用いれば、全体模型における振動方程式は部分模型における振動方程式に帰着されるが、一般に非定常空気力は振幅に対して非線形であるために全体模型の応答解析において strip theoryを用いても部分模型の振動方程式に帰着されることはなく、部分模型と全体模型とではその応答に差が生ずるはずである。この観点から、我々は部分模型、全体模型におけるそれぞれの応答の相関性を検討するための手法を展明してきている。^(*) その手法とは、測定空気力を用いて応答を逐次追跡する方法である。その場合、1周期の間はその前の1周期の最終時間での変位と速度を初期条件とした線形解を用いることによって、1周期毎の応答を追跡するものである。本報告では曲げ-捩れ連成振動における線形解を使った場合の定常振動解およびその安定性を議論し、部分模型、全体模型における応答の相関性について述べると同時に、空気力の測定および応答の観察という二つの異なる実験法での現象の本理論で結びつけられることを示している。

定常振動解およびその安定判別

曲げ-捩れ連成振動における振動方程式は次式で示される。

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad \text{--- ①}$$

ただし、 M_i : 質量マトリクス, C_i : 構造減衰マトリクス, K_i : 剛性マトリクス

θ_i : 変位ベクトル, f_{ij}, g_{ij} : 空気力マトリクス, $\dot{\cdot}$: 時間微分

ここで、 $\theta = [U] \Phi$ なる変換を行ない、 Φ の要素 Φ_1, Φ_2 を求める。

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(t) &= e^{s_1 \omega_1 t} (C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t) + e^{s_2 \omega_2 t} (C_3 \cos \omega_2 t + C_4 \sin \omega_2 t) \\ \Phi_2(t) &= \gamma_1 e^{s_1 \omega_1 t} (C_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + C_2 \sin(\omega_1 t + \theta_1)) + \gamma_2 e^{s_2 \omega_2 t} (C_3 \cos(\omega_2 t + \theta_2) + C_4 \sin(\omega_2 t + \theta_2)) \end{aligned} \right\} \text{--- ②}$$

ただし、 $s_1 = \frac{1}{2\omega_1}(\alpha + a_{11} + a_{22})$, $s_2 = \frac{1}{2\omega_2}(-\alpha + a_{11} + a_{22})$, $\omega_1 = \frac{1}{2}\sqrt{4\beta_1 - \alpha^2}$, $\omega_2 = \frac{1}{2}\sqrt{4\beta_2 - \alpha^2}$

この Φ_1, Φ_2 の線形結合により、全体模型の応答 θ_1, θ_2 が求められる。②式の誘導および各係数についてはすでに報告した^(*)。さて、定常振動解は次式を満たすから、

$$\Phi_1(t+T) = \Phi_1(t), \quad \Phi_2(t+T) = \Phi_2(t) \quad (T: \text{周期}) \quad \text{--- ③}$$

③式に②式を代入して定常振動解を得る条件を導くと、i) $s_1 = 0, s_2 = 0$, ii) $s_1 = 0, s_2 > 0$ (あるいは $s_1 > 0, s_2 = 0$) となる。i) の条件から次の関係式 $a_{11} + a_{22} = 0$, $b = b_{12}a_{21} + b_{21}a_{12} = 0$, $a = 2\sqrt{C}$ が得られるが、これはかなり厳しいものであり、具体的には次のことを意味する。空気減衰を含んだ形での捩れ振動および曲げ振動それぞれの減衰比 (a_{11}, a_{22}) の和が零になり、空気力の連成項 (M_{ij}, L_{ij}) の実数部、虚数部の互いの積の和が零になった上に $a = 2\sqrt{C}$

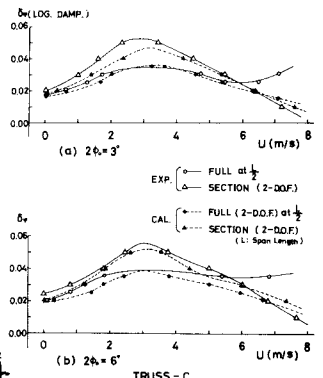


Fig. 1 Comparison of Torsional Responses of Section and Full Models

(*)久保、宮田、伊藤；“吊橋の空気弾性振動の数値解析”第29回土木学会年次学術講演会概集

を同時に満足しなければならない。このような現象はほとんど現れないと考えてよいであろう。ii)の条件からは $\alpha + a_{11} + a_{22} = 0$, $\alpha < 0$, $b > 0$ が得られ、この時の定常振動は次のように表現できる。

$$\varphi_1(t) = C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t, \quad \varphi_2(t) = \varphi_1'(C_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + C_2 \sin(\omega_1 t + \theta_1)) \quad \text{④}$$

さらに、実際の現象と関連づけて、これらの周期解を考察すると； 1) $a_{11} > 0, a_{22} > 0$ の場合は、空気力係数では $M_{qI} < 0, L_{qI} < 0$ に相当する場合であるが、この条件下での定常振動は平板系などに見られる純粋な曲げ-捩れ二自由度フラッターと呼ばれるものである。このとき $r_1 = 0$ とすると $\alpha = -(a_{11} + a_{22}) < 0, r_2 > 0$ となり、ii)の条件を満たし、定常振動解は④式で与えられる。 2) $a_{11} < 0, a_{22} > 0$ の場合は $M_{qI} > 0, L_{qI} < 0$ に対応する場合で、このとき自由度捩れフラッターが生ずることになるが、 $|a_{11}| < a_{22}$ の場合には $r_1 = 0$ に対して $r_2 > 0$ となって定常振動はやはり④式で表現される。 3) $a_{11} > 0, a_{22} < 0$ のときは $M_{qI} < 0, L_{qI} > 0$ となって、ギャロップ現象の条件となる。 $|a_{11}| > |a_{22}|$ の場合には、 $r_2 = 0$ に対して $r_1 > 0$ となり、定常振動は

$$\varphi_1(t) = C_3 \cos \omega_2 t + C_4 \sin \omega_2 t, \quad \varphi_2(t) = \varphi_2'(C_3 \cos(\omega_2 t + \theta_2) + C_4 \sin(\omega_2 t + \theta_2)) \quad \text{⑤}$$

で表現される。上記以外のときは全て発散することになる。以上の考察から、すべての定常振動は④式あるいは⑤式で表現され、いずれの現象も定常振動解の形の上では差がなく現象の上での差は θ, θ_2 によって特徴づけられる。このことは、連成系の定常振動は捩れ振動に支配され、曲げ振動はその回転中心の移動によって随伴することから理論的に示されたことになる。したがって、連成系の定常振動の安定判別は、非連成系の安定判別法

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial r_1(\varphi_{10}, U_r)}{\partial \varphi_{10}} > 0 \quad \text{安定} \\ \frac{\partial r_1(\varphi_{10}, U_r)}{\partial \varphi_{10}} < 0 \quad \text{不安定} \end{array} \right\} \quad \text{⑥}$$

を用いて連成系の定常振動解の安定判別が可能となる。連成系においては、②式より r_1 を書き換えると

$$r_1(\varphi_{10}, \varphi_{20}, U_r) = \alpha(\varphi_{10}, \varphi_{20}, U_r) + a_{11}(\varphi_{10}, U_r) + a_{22}(\varphi_{20}, U_r) / 2\omega_1$$

$$2\omega_1 \frac{\partial r_1(\varphi_{10}, \varphi_{20}, U_r)}{\partial \varphi_{10}} = \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_{10}} + \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_{20}} \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial \varphi_{10}} - \frac{\pi 3B^2 \omega_1^2}{4\omega_1} \frac{\partial}{\partial \varphi_{10}} \left[\frac{M_{qI}(\varphi_{10}, U_r)}{\varphi_{10}} \right] - \frac{\pi 3B^2 \omega_1^2}{4\omega_1} \frac{\partial}{\partial \varphi_{20}} \left[\frac{L_{qI}(\varphi_{20}, U_r)}{\varphi_{20}} \right] \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial \varphi_{10}}$$

となるので、これに⑥式を適用して安定判別ができる。

部分模型、全体模型の応答比較

トラス補剛桁を有する吊橋断面について行った実験結果および解析結果を部分模型および全体模型について併記したのが Fig. 1, Fig. 2 である。Fig. 1 では捩れ振動の特定振幅における風速-減衰率（構造減衰+空力減衰）関係図を示し、Fig. 2 では定常振動の発生したケースについて風速-振幅関係図を示している。Fig. 1 についてみると、風速に対する減衰の変化は全体模型の方が緩慢であるが、高風速域 (6m/sec) では実験値の減衰率は大きくなっている。これは抗力の増大によって横たわみ量が大きくなり構造系が変化したためと考えられる。Fig. 1, Fig. 2 のどちらにおいても実験結果と解析結果とは良い一致を示し、本解析法が妥当であることを裏付けている。Fig. 3 にはスパン方向に風速が変化する場合における風速の分布形と応答履歴との関係を示している。これから応答履歴は風速の分布形によってかなり異なること、および基準風速としてどの点を選ぶかが設計風速との関連で重要な問題となり得ることがわかる。

あとがき

本解析法の妥当性を検証するために実験結果とのつきあわせを行ったが、ほぼ妥当なものと言える。部分模型、全体模型の応答比較をみると、曲げ振動が付随しにくい断面では全体模型におけるものの方が低風速側で発振し、曲げ振動が付随しやすい断面では部分模型におけるものの方が低風速側で発振する傾向を有する。

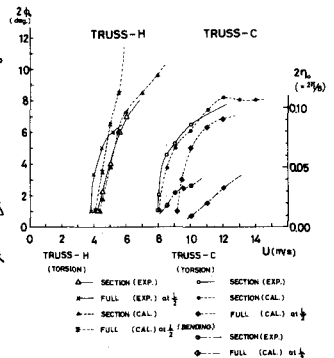


Fig. 2 Comparison of Oscillations of Section and Full Models in Bending-Torsional Two Degrees

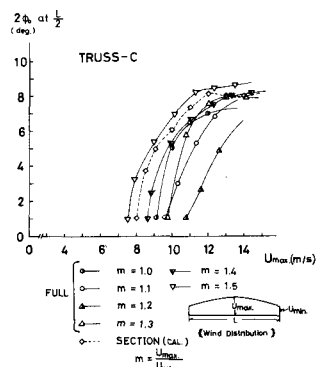


Fig. 3 Comparison of Torsional Oscillations of Full Model with Wind Distribution in Bending-Torsional Two Degrees Analysis