# I-197 ブロック剛性マトリックス法による吊橋のねじり解析


大阪大学工学部 正員 小松定夫
大阪大学工学部 正員○西村宣男


1. まえがき 吊橋の立体構造解析法はいわゆる膜理論を拡張したものと、変形法によるものとに大別される。前者による基礎微分方程式の解法としては、変位を三角級数に仮定したガラーキン法、差分法、ラプラス変換法が採用されている。これらの方法は汎用性については変形法に比べて劣る。そこで吊橋を任意の長さに分割したブロックに関するブロック剛性マトリックスを誘導し、一般の変形法と同様の計算処理を行なうと、膜理論についても汎用性を向上することが可能である。この種の解法[1),2)]は既に2・3発表されているが、本研究では基礎微分方程式の厳密解を使用して剛性マトリックスを導びく。

2. 断面変形を考慮したねじり解析 吊構造の横断面変形を考慮した吊橋のねじりに関する基礎方程式[3)]は

$$a w'' - b_1 w - b_2 \varphi' - b_1 \theta' = 0 \;,\; -B_1 \varphi'' - B_2 \theta'' - b_2 w' = M_t \;,\; -B_2 \varphi'' - B_1 \theta'' - b_1 w' + \gamma\theta = M_\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

こゝに $B_1 = b_1 + b_c^2 H_d/2$, $B_2 = b_2 + b_c^2 H_d/2$, $M_t = m_t + H_p b_c y''$, $M_\theta = m_\theta + H_p b_c y''$ 詳しい記号については文献3)を参照されたい。 式(1)より $\varphi$ と $\theta$ を消去し、更に $f = \int w\,dz$ を導入すると

$$f^{VI} - 2r^2 f^{IV} + s^4 f'' = \Gamma M_t \quad \cdots\cdots (2)$$

こゝに

$$2r^2 = \frac{(b_1^2 - b_2^2)\frac{b_c^2}{2}H_d + \gamma a\left(b_1 + \frac{b_c^2}{2}H_d\right)}{a(b_1 - b_2)(b_1 + b_2 + b_c^2 H_d)} \,,\quad s^4 = \frac{\gamma\left(b_1^2 - b_2^2 + b_1\frac{b_c^2}{2}H_d\right)}{a(b_1 - b_2)(b_1 + b_2 + b_c^2 H_d)} \,,\quad \Gamma = \frac{\gamma b_2}{a(b_1 - b_2)(b_1 + b_2 + b_c^2 H_d)}$$

式(2)の一般解は r と s の大小により、以下の3通りに分かれる。

$$\left.\begin{aligned}
&\text{(a)}\;\; r < s \quad \alpha = \sqrt{(s^2 + r^2)/2}\,,\;\; \beta = \sqrt{(s^2 - r^2)/2}\;; \quad f = C_1 \cosh\alpha z \sin\beta z + C_2 \cosh\alpha z \cos\beta z \\
&\qquad + C_3 \sinh\alpha z \sin\beta z + C_4 \sinh\alpha z \cos\beta z + C_5 z + C_6 + \frac{b_2 M_t}{2b_1(GJ + b_c^2 H_d/2)} z^2 \\
&\text{(b)}\;\; r = s = \alpha \quad f = C_1 \cosh\alpha z + C_2 \sinh\alpha z + C_3 z\cosh\alpha z + C_4 z \sinh\alpha z + C_5 z + C_6 + \frac{b_2 M_t}{2b_1(GJ + b_c^2 H_d/2)} z^2 \\
&\text{(c)}\;\; r > s \quad \alpha = \sqrt{r^2 + \sqrt{r^4 - s^4}}\,,\;\; \beta = \sqrt{r^2 - \sqrt{r^4 - s^4}} \\
&\qquad f = C_1 \cosh\alpha z + C_2 \sinh\alpha z + C_3 \cosh\beta z + C_4 \sinh\beta z + C_5 z + C_6 + \frac{b_2 M_t}{2b_1(GJ + b_c^2 H_d/2)} z^2
\end{aligned}\right\} (3)$$

変位および断面力を関数 f で表わすと

$$\left.\begin{aligned}
&w = f',\;\; \theta = \frac{M_\theta}{\gamma} + \frac{M_t}{\gamma}\frac{(b_2 - b_1)\frac{b_c^2}{2}H_d}{b_1 GK} - \frac{GJ}{\gamma GK}\frac{b_c^2}{2}H_d f'' + \frac{a}{\gamma b_1 GK}(b_1 + b_2 + b_c^2 H_d)(b_1 - b_2) f^{IV},\;\; \varphi = -\frac{M_\theta}{\gamma}\frac{b_1}{b_2} \\
&-\frac{M_t}{\gamma}\frac{(b_2 - b_1)\frac{b_c^2}{2}H_d}{b_2 GK} + \left(\frac{a}{b_2} + \frac{GJ}{\gamma GK}\frac{b_1}{b_2}\frac{b_c^2}{2}H_d\right) f'' - \frac{b_1}{b_2} f - \frac{a}{\gamma GK}\frac{b_1}{b_2}\left\{GJ + \left(1 - \frac{b_2}{b_1}\right) b_c^2 H_d\right\} f^{IV},\;\; M_w = a f'',\;\; T_\theta = a f''' \\
&T = \left(a\frac{b_1}{b_2} + \frac{GJ}{\gamma GK}\frac{b_c^2}{2}H_d\frac{b_1^2 - b_2^2}{b_2}\right) f''' - \frac{b_1^2 - b_2^2}{b_2} f' - \frac{a}{\gamma GK}\left\{GJ + \left(1 - \frac{b_2}{b_1}\right) b_c^2 H_d\right\}\frac{b_1^2 - b_2^2}{b_2} f^{V}
\end{aligned}\right\} (4)$$

こゝに $GJ = (b_1^2 - b_2^2)/b_1$, $GK = B_1 - b_2 B_2/b_1$

要素の両端の変位成分 $\mathbf{x}_i = \{w(0);\ \varphi(0);\ \theta(0);\ w(l_i);\ \varphi(l_i);\ \theta(l_i);\ 1\}$ と式(3)の積分定数 $\mathbb{C}_i = \{C_1;\ C_2;\ C_3;\ C_4;\ C_5;\ C_6;\ 1\}$ との関係は式(3),(4)より $\mathbf{x}_i = \mathbb{A}_i \mathbb{C}_i \cdots\cdots (5)$。さらに要素両端における吊橋系としての断面力 $\mathbb{F}_i = \{-M_w(0);\ -T(0) - \frac{b_c^2}{2}H_d[\varphi'(0) + \theta'(0)];\ -T_\theta(0) - \frac{b_c^2}{2}H_d[\varphi'(0) + \theta'(0)];\ M_w(l_i);\ T(l_i) + \frac{b_c^2}{2}H_d[\varphi'(l_i) + \theta'(l_i)];\ T_\theta(l_i) + \frac{b_c^2}{2}H_d[\varphi'(l_i) + \theta'(l_i)]\}$ と $\mathbb{C}_i$ の関係は $\mathbb{F}_i = \mathbb{B}_i \mathbb{C}_i \cdots\cdots (6)$。式(5),(6)より $\mathbb{F}_i = \mathbb{B}_i \mathbb{A}^{-1} \mathbf{x}_i$ となり、ブロック剛性マトリックスは $\mathbb{K}_i = \mathbb{B}_i \mathbb{A}_i^{-1}$ で与えられる。

ケーブルの付加水平張力は次式を用いて求める。 $H_p = -\frac{E_c F_c}{L_c}\sum_{i=1}^{N} y''\frac{b_c}{2}\int_0^{l_i}(\varphi_i + \theta_i)\,dz \quad \cdots\cdots (7)$

3. 断面変形を無視したねじり解析 吊構造の横断面変形を無視した場合のねじりに関する微分方程式は

$$f^{IV} - \bar{\lambda} f'' = -\frac{M_t}{E\Gamma} \cdots\cdots (8), \quad こゝに \quad \bar{\lambda}^2 = \frac{b_1^2 - b_2^2 + b_1\frac{b_c^2}{2}H_d}{a\left(b_1 + \frac{b_c^2}{2}H_d\right)} \,,\quad E\Gamma = \frac{a}{b_2}\left(b_1 + \frac{b_c^2}{2}H_d\right)$$

式(8)の一般解は $f = C_1 + C_2 z + C_3 \sinh\bar{\lambda} z + C_4 \cosh\bar{\lambda} z + \frac{M_t}{2E\Gamma\bar{\lambda}^2} z^2 \cdots\cdots (9)$。 変位および断面力を関数

fで表わすと $w=f'$, $\varphi=\frac{a}{b_2}f''-\frac{b_1}{b_2}f$, $M_w=af''$, $T=-\frac{b_1^2-b_2^2}{b_2}f'+a\frac{b_1}{b_2}f'''$ ……(10)

前節と同様に要素両端の変位 $x_i=\{w(0);\varphi(0);w(l_i);\varphi(l_i);1\}$ と積分定数 $\mathbb{C}_i=\{C_1;C_2;C_3;C_4;1\}$ の関係を $x_i=A_i\mathbb{C}_i$, さらに要素両端の吊橋系としての断面力 $\mathbb{F}_i=\{-M_w(0);-T(0)-\frac{b_c^2}{2}H_d\varphi'(0);M_w(l_i);T(l_i)+\frac{b_c^2}{2}H_d\varphi'(l_i)\}$ と $\mathbb{C}_i$ との関係を $\mathbb{F}_i=\mathbb{B}_i\mathbb{C}_i$ と表わすと, ブロック剛性マトリックスは $\mathbb{K}_i=\mathbb{B}_i\mathbb{A}_i^{-1}$ で与えられる。マトリックス $\mathbb{A}_i$, $\mathbb{B}_i$ はそれぞれつぎのように与えられる。 $a_1=\bar{\lambda}$, $a_2=-b_1/b_2$, $a_3=a\bar{\lambda}^2/b_2-b_1/b_2$, $a_4=\bar{\lambda}\cosh\bar{\lambda}l_i$, $a_5=\bar{\lambda}\sinh\bar{\lambda}l_i$, $a_6=-b_1l_i/b_2$, $a_7=(a\bar{\lambda}^2/b_2-b_1/b_2)\sinh\bar{\lambda}l_i$, $a_8=(a\bar{\lambda}^2/b_2-b_1/b_2)\cosh\bar{\lambda}l_i$, $a_9=M_t\,a/b_2E\Gamma\bar{\lambda}^2$, $a_{10}=M_tl_i/E\Gamma\bar{\lambda}^2$, $a_{11}=(a/b_2+l_i^2/2)M_t/E\Gamma\bar{\lambda}^2$

$k_1=a\bar{\lambda}^2$, $k_2=-(GJ+b_c^2H_d/2)b_1/b_2$, $k_3=(b_1+b_c^2H_d/2)a\bar{\lambda}^3/b_2-(GJ+b_c^2H_d/2)b_1\bar{\lambda}/b_2$, $k_4=a\bar{\lambda}^2\sinh\bar{\lambda}l_i$, $k_5=a\bar{\lambda}^2\cosh\bar{\lambda}l_i$, $k_6=[(b_1+b_c^2H_d/2)a\bar{\lambda}^3/b_2-(GJ+b_c^2H_d/2)b_1/b_2]\cosh\bar{\lambda}l_i$, $k_7=[(b_1+b_c^2H_d/2)a\bar{\lambda}^3/b_2-(GJ+b_c^2H_d/2)b_1/b_2]\sinh\bar{\lambda}l_i$, $k_8=aM_t/E\Gamma\bar{\lambda}^2$, $k_9=M_t/E\Gamma\bar{\lambda}^2\cdot b_1/b_2\cdot(GJ+b_c^2H_d/2)\cdot l_i$

$$\mathbb{A}_i=\begin{pmatrix}0&1&a_1&0&0\\a_2&0&0&a_3&a_9\\0&1&a_4&a_5&a_{10}\\a_2&a_6&a_7&a_8&a_{11}\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad \mathbb{B}_i=\begin{pmatrix}0&0&0&-k_1&-k_8\\0&-k_2&-k_3&0&0\\0&0&k_4&k_5&k_8\\0&k_2&k_6&k_7&k_9\end{pmatrix}$$

## 4. 計算法に関する考察と数値計算例

本四連絡橋計画案の道路鉄道併用連続吊橋について数値計算を行なった。荷重①および②はそれぞれ 15.12 tm/m, および 43.12 tm/m の分布トルク荷重である。図1では吊構造部材断面積のスパン方向変化を考慮した変断面吊橋と、全径間にわたり断面積を平均化した換算等断面吊橋の力学量を比較した。図2では吊構造の横断面変形を考慮した解法と、無視した解法とにおける主な力学量を示した。この例では、ねじれ角やねじりモーメントについては両解法による差はほとんど現われない。しかしバイモーメントについては中間支点付近でかなり大きな差を生じている。

本計算法の特長はつぎのような点にある。(1) 本法によれば、基礎方程式 (2) または (8) の厳密解を求めることができる。(2) 計算時間は級数解法, 差分法などに比較して極めて短い。1荷重ケースにつき CPU・Time は約1秒程度である。(大阪大学大型計算センター、NEAC 2200-700 使用) (3) 任意の境界条件に適用できるから、架設中の立体解析に使用できる。

また一般の変形法による立体解析に比べても計算時間、計算機容量において優れている。計算精度についても十分満足できるものであるが、具体的な比較計算例については講演当日、申し上げる。

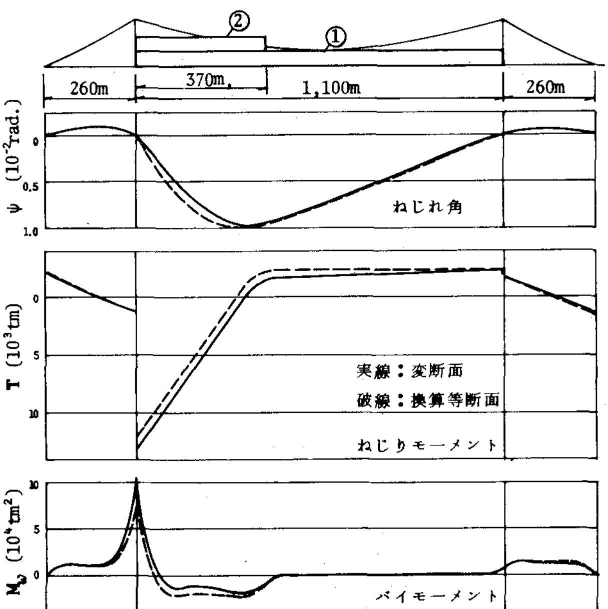


図1 変断面つり橋と換算等断面つり橋の比較

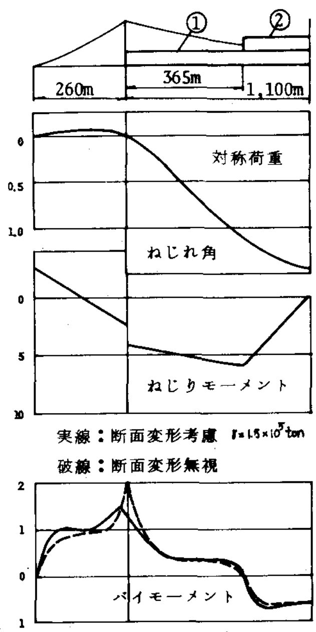


図2 断面変形を考慮した場合と無視した場合の比較


参考文献 1) 大地羊三, 渡辺隆之: 剛性マトリックスを用いた吊橋の解法, 土木学会年次講演会概要集 I-180 昭和49年 2) 上原七司; 吊橋の振動解析に関する計算法的考察, 土木学会論文報告集 No.235, 昭和50年 3) 小松定夫、西村宣男; 吊構造の横断面変形を考慮した吊橋の立体解析, 土木学会論文報告集 No.236, 昭和50年