I-196

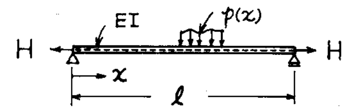
吊橋の剛性マトリックスによる解析法

北海道大学工学部　正員　渡辺 昇
北海道大学工学部　正員　○佐藤浩一

1．まえがき

引張軸力(H)が作用する桁の剛性マトリックスを *Anfang Parameter* 法により誘導し，吊橋の線形化された撓度理論の解析に応用したものであり，従来の応力法による方法と数値計算を行なって比較したものである。

2．引張軸力が作用する桁の剛性マトリックスの誘導



図－1

図－1のような引張軸力が作用する桁に分布荷重 $p(x)$ が作用する時の桁の微分方程式は　$EI\cdot v^{IV}(x) - H\cdot v''(x) = p(x)$　となるが，剛性マトリックスでは l 区間に荷重がないので，$\alpha = \sqrt{H/EI}$ とおいて，

$v^{IV}(x) - \alpha^2 v''(x) = 0$ -----(1) となる。従って，一般解は $v(x) = A\cdot\sinh\alpha x + B\cdot\cosh\alpha x + Cx + D$ -----(2) となる。これより，$v'(x), M(x), Q(x)$ を求めれば，$v'(x) = A\cdot\alpha\cdot\cosh\alpha x + B\cdot\alpha\cdot\sinh\alpha x + C$ -----(3)

$M(x) = -EI\cdot\alpha^2(A\cdot\sinh\alpha x + B\cdot\cosh\alpha x)$ -----(4)，　$Q(x) = EI\cdot\alpha^2 C$ -----(5) となる。

境界条件　$x=0$ で，$v(0), v'(0), M(0), Q(0)$ を与えて，A，B，C，D を求めれば，

$A = \frac{1}{\alpha}\left\{v'(0) - \frac{Q(0)}{H}\right\}$，$B = -\frac{M(0)}{H}$，$C = \frac{Q(0)}{H}$，$D = v(0) + \frac{M(0)}{H}$ -----(6)　となり，

式(6)を式(2)，(3)，(4)，(5)に代入し，$x=l$ とおき，行列表示すれば，次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} v(l) \\ v'(l) \\ M(l) \\ Q(l) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha}\sinh\alpha l & \frac{1}{H}(1-\cosh\alpha l) & \frac{1}{H\alpha}(\alpha l - \sinh\alpha l) \\ 0 & \cosh\alpha l & -\frac{\alpha}{H}\sinh\alpha l & \frac{1}{H}(1-\cosh\alpha l) \\ 0 & -\frac{H}{\alpha}\sinh\alpha l & \cosh\alpha l & \frac{1}{\alpha}\sinh\alpha l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v(0) \\ v'(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{Bmatrix} \quad \text{-----}(7)$$

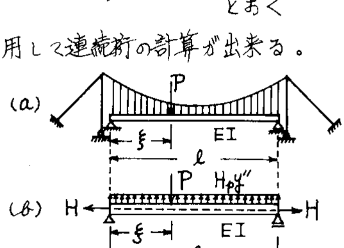
この式(7)を変形すれば，式(8)となる。ただし，$\nu = H^2/(2 - 2\cosh\alpha l + \alpha l\cdot\sinh\alpha l)$ である。

$$\begin{Bmatrix} Q(0) \\ M(0) \\ Q(l) \\ M(l) \end{Bmatrix} = \nu \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{H}\sinh\alpha l & \frac{1}{H}(1-\cosh\alpha l) & -\frac{\alpha}{H}\sinh\alpha l & \frac{1}{H}(1-\cosh\alpha l) \\ \frac{1}{H}(1-\cosh\alpha l) & \frac{1}{H\alpha}(\alpha l\cdot\cosh\alpha l - \sinh\alpha l) & -\frac{1}{H}(1-\cosh\alpha l) & \frac{1}{H\alpha}(\sinh\alpha l - \alpha l) \\ -\frac{\alpha}{H}\sinh\alpha l & -\frac{1}{H}(1-\cosh\alpha l) & \frac{\alpha}{H}\sinh\alpha l & -\frac{1}{H}(1-\cosh\alpha l) \\ \frac{1}{H}(1-\cosh\alpha l) & \frac{1}{H\alpha}(\sinh\alpha l - \alpha l) & -\frac{1}{H}(1-\cosh\alpha l) & \frac{1}{H\alpha}(\alpha l\cdot\cosh\alpha l - \sinh\alpha l) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v(0) \\ v'(0) \\ v(l) \\ v'(l) \end{Bmatrix} \quad \text{-----}(8)$$

これを $\{F\} = [K]\{d\}$ とおく

この式(8)が引張軸力が作用する時の剛性マトリックスである。これを利用して連続桁の計算が出来る。

3．吊橋の剛性マトリックス



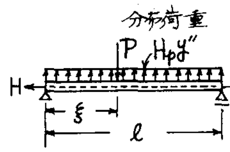
図－2

図－2(a)のような単径間吊橋は，図－2(b)のような，荷重 $P, H_p y'', H$ による単純桁の撓みと断面力に等しいとすることが出来るから，単純吊橋の補剛桁の計算には，図－2(b)のごとく載荷されている桁の問題に帰着することが出来る。従って，吊橋の補剛桁の撓みについての基礎方程式は

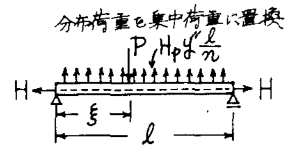
$EI\cdot v^{IV}(x) - H\cdot v''(x) = p(x) + H_p y''$ -----(9)

ケーブルについての基礎方程式は　$H_p\frac{L_c}{E_c A_c} + y''\int_0^l v(x)\,dx = 0$ -----(10) であるので，集中荷重(P=1)を載荷した場合(図－3(a))の式(9)の解は線形化して，$v(x,\xi) = G(x,\xi) + H_p y''\int_0^l G(x,\lambda)\,d\lambda$ ----(11)，式(9)，式(11)を用いて $H_p(\xi)$ を求めれば，式(12)となる。ここで，$G(x,\xi)$ は影響関数である。

$$H_p(\xi)=\frac{-y''\int_0^L G(x,\xi)\,dx}{\dfrac{L_c}{E_cA_c}+y''^2\int_0^L\int_0^L G(x,\lambda)\,d\lambda\,dx}\cdots(12)$$

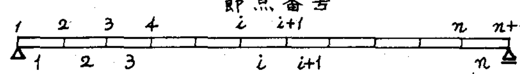


図−3(a)

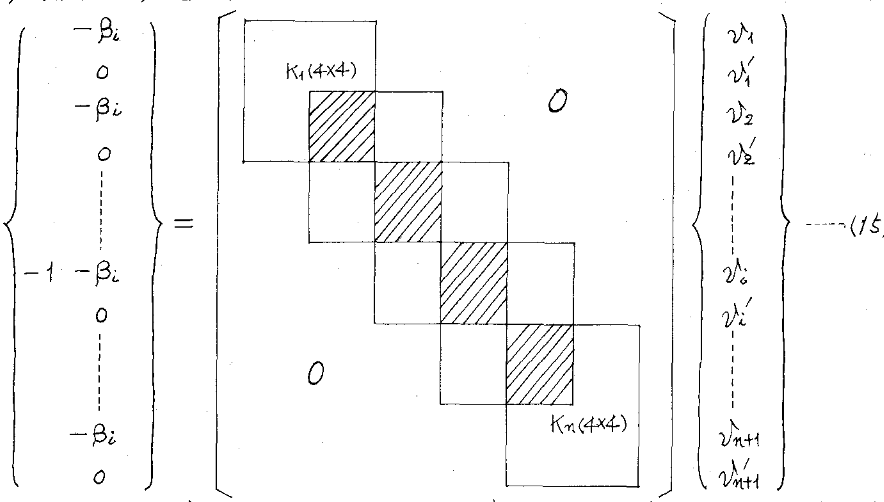


図−3(b)

式(12)を式(11)に代入すれば，補剛桁の撓みが求まる。ここでは，式(9)における分布荷重 $H_p y''$ を即ち，図−3(a)を図−3(b)のように多数（ハンガーごと）の集中荷重に置換して解析を行なう。その時の式(9)は $EI\cdot v^{IV}(x)-H\cdot v''(x)=\delta(x-\xi)+y''\frac{l}{n}\sum_{r=1}^{n}H_p(lr)\cdot\delta(x-lr)$ ……(13) となる。$\beta(lr)=H_p(lr)\cdot y''\frac{l}{n}$ ……(14) とおく。図−2(a)のような吊橋において，要素はハンガー間隔を一要素とし，図−4のように，節点番号と要素番号をつけ，一例として節点 i に集中荷重 $P=1$ を載荷した場合の吊橋の剛性マトリックスは式(8)を用いれば，式(15)のようになる。



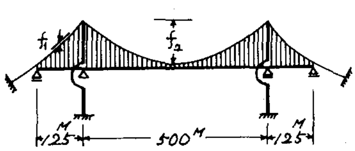
図−4



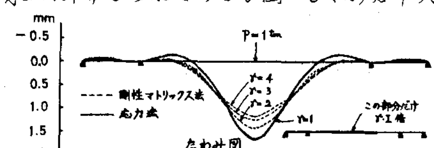
式(15)において，β_i は式(14)で求めたものが入り，連続吊橋の場合は式(15)において支点の節点番号の個所の v を零とすればよい。

4．数値計算例

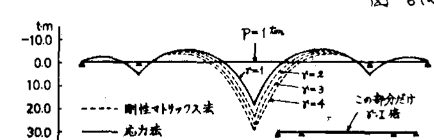
数値計算例として図−5のような三径間連続吊橋を例にとった。なお，補剛桁を120の要素に分割して計算を行なった。また，各要素ごとの変断面の場合の計算も可能である。図−6(a)は中央径間中央に $P=1$ ton 載荷した時のたわみ図であり図−6(b)は曲げモーメント図である。



図−5



図−6(a)



図−6(b)

断面諸元

$E_c=1.6\times10^7\,t/m^2$, $A_c=0.28\,m^2$, $E=2.1\times10^7\,t/m^2$, $I=1.5\,m^4$,

$f_1=3.125\,m$, $f_2=50\,m$, $R_1=R_2=625\,m$, $L_c=900\,m$,

$H_g=9375\,ton$

5．あとがき

本報告での解析法は従来からの応力法と比較してよく一致していることがわかる。また，各要素ごとの変断面の場合も計算可能である。計算には北海道大学大型計算機センターの FACOM 230−75 を用いた。

参考文献

1) 橘善雄，小松定夫 共訳：鋼橋の理論と計算，山海堂（1965）

2) 家農知徳：せん断変形の影響を考慮した薄肉骨組系の剛性マトリックス　北海道支部論文報告集 第30号（1974）