I-194　　連成を考慮した吊橋の基礎方程式について（第1報　微小変形の場合）

長崎大学工学部　正員　高橋和雄

1.緒言　従来の吊橋の変形や応力解析にあたっては，補剛桁の変形は鉛直，水平およびねじれがそれぞれ独立に生ずるものとする解析方法が行われてきた。しかし，吊橋のケーブルの左右の変位差や補剛桁自身が最初からキャンバーによる曲率を持つことなどのために各変位が独立に生じることは不可能である。また，吊橋の補剛桁は一般に長大スパンで，中空断面のトラスやボックスなどの薄肉断面で構成され，かつケーブルが変形しやすい構造物であることを考慮すると，その応力解析には有限変形理論の適用や断面剛の仮定の検討などが必要である。この種の問題に関して最近本四連絡橋上部構造委員会の活動をはじめとしていくつかの研究が見受けられる。[1)~3)]
連成を考慮した吊橋の基礎方程式は幾何学的考察により力の釣合式から誘導されているために，連成を含む項の検討や有限変形，断面変形を考慮する場合には困難が伴う。そこで本研究は変分原理を用いて最小ポテンシャルエネルギーの原理より連成を考慮した吊橋の基礎方程式の誘導を試みたものである。周知のように本法の特徴は材料力学の基本的な仮定のみを用い，後は数学的演算のみで基礎方程式を誘導することができるために，複雑な構造系への適用が容易である。本論文では，その第1報として吊橋のキャンバーによる曲率を考慮した基礎方程式を微小変形理論の範囲で導いた結果を報告するとともに，計算例として3分力を考慮した風荷重を受ける吊橋の曲げの問題に適用したものである。

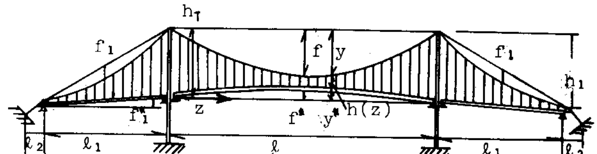

図-1 吊橋一般図

2.吊橋の解析における基本的仮定

(1)ケーブルは完全な可撓性をもつ。

(2)塔の伸縮および曲げは生じない。

(3)ケーブルおよび補剛桁の死荷重はケーブルのみによって支えられる。補剛桁の応力は活荷重および温度変化によって生ずる。

(4)ケーブルおよび補剛桁の単位長さあたりの死荷重および断面性能は各径間ごとに一定である。

(5)吊材は非常に稠密に配置されているものとし，ケーブルと補剛桁は連続的に吊材で連結されている。

(6)ケーブルおよび補剛桁のひずみおよび変形は微小で，Hookeの法則および微小変形理論が成立する。

(7)吊材は垂直に配置されており，載荷によるひずみを無視する。

(8)ケーブルおよび補剛桁の橋軸方向の変形を無視する。

(9)ケーブルの定着点は不動である。

(10)補剛桁の変形に際して断面剛の仮定が成り立つ。

3.ひずみの定義　図-2に示すような座標系をとり，ζ軸を絶対座標のz軸の方向に定める。断面剛の仮定より，はり内の任意点の変位関数が次のように定義される。

$$U = u(\zeta) - \eta\theta_\zeta(\zeta) \qquad (1) \qquad V = v(\zeta) + (\xi + e)\theta_\zeta(\zeta) \qquad (2)$$

$$W = -\xi u'(\zeta) - \eta v'(\zeta) + \theta_\zeta'\{w_n(\xi, \eta) + e\xi\} \qquad (3)$$

ここに，U，V，W；はりの図心Gを原点としたときのはり断面の任意点の変位，u，v；せん断中心の横たわみ，θ_ζ；せん断中心まわりの回転角，θ_ζ'；ねじれ率，w_n；規準化されたSt. Venantのゆがみ関数，e；せん断中心と図心の距離，′はζに関する微分を示す。

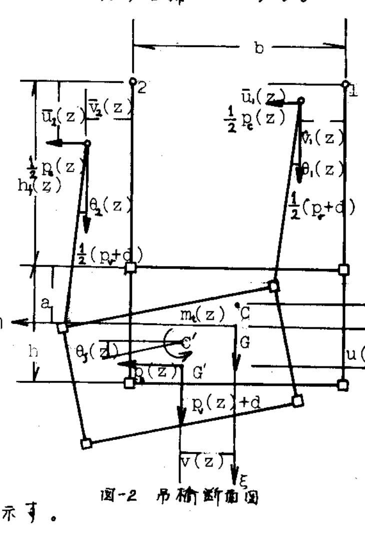

図-2 吊橋断面図

式(1)～(3)を用いてテンソル解析により，キャンバーによる曲率κを持つ吊橋の補剛桁のひずみが決定される。[4)]

$$\varepsilon_\xi=\varepsilon_\eta=\gamma_{\xi\eta}=0\,,\quad \varepsilon_\zeta=-K_1 u+\eta(-v''+K_1\theta_\zeta)-\xi u''+\theta_\zeta'' w_n \tag{4}$$

$$\gamma_{\zeta\xi}=-\eta(\theta_\zeta'+K_1 v')+(w_n'+K_1 w_n)\theta_\zeta'\,,\quad \gamma_{\eta\zeta}=\xi(\theta_\zeta'+K_1 v')+(w_n'+e)\theta_\zeta'$$

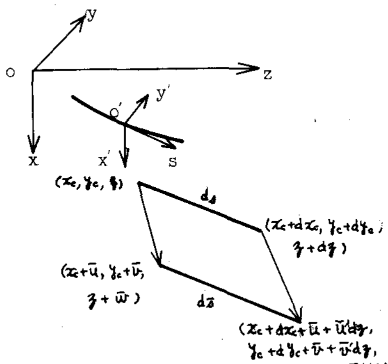

図-3 ケーブル

次にケーブルのひずみを初期たわみを持つ場合について誘導する。図-3に示すように初期状態におけるケーブルの任意点o'の座標を(x_c, y_c, z)，微小距離だけ離れた点を$(x_c+dx_c, y_c+dy_c, z+dz)$とすると，変形後の座標はそれぞれ$(x_c+\bar{u}, y_c+\bar{v}, z+\bar{w})$，$(x_c+dx_c+\bar{u}+\bar{u}'dz, y_c+dy_c+\bar{v}+\bar{v}'dz, z+dz+\bar{w}+\bar{w}'dz)$で表わされるから，ひずみは次式で定義される。

$\varepsilon_c=(d\bar{s}-d_s)/d_s$ (5) ここに，$d_s=(1+x_c'^2+y_c'^2)^{1/2}dz$，$d\bar{s}=\{1+2\bar{w}'+\bar{w}'^2+2x_c'\bar{u}'+\bar{u}'^2+y_c'^2+2y_c'\bar{v}'+\bar{v}'^2\}^{1/2}dz$，$'$は$d/dz$を示す。

上式をTailor展開のうえ，ケーブルの橋軸方向変位$\bar{w}$を無視して，ケーブルがx_c方向に初期たわみを持つことを考慮して，変位の2次のオーダーまで採用すれば，次式をうる。

$$\varepsilon_c=\left(x_c'\bar{u}'+\tfrac{1}{2}\bar{u}'^2+\tfrac{1}{2}\bar{v}'^2\right)/(1+x_c'^2) \tag{6}$$

4.吊橋全体のポテンシャルエネルギー　補剛桁のひずみエネルギーはHookeの法則を用いて次式で表わされる。

$$V_2=\frac{1}{2}\iiint\{E\varepsilon_\zeta^2+G(\gamma_{\zeta\xi}^2+\gamma_{\eta\zeta}^2)\}d\xi d\eta dz \tag{7}$$

ケーブルは初期たわみと付加たわみを持つことから，ケーブルi $(i=1,2)$のひずみエネルギーは式(6)を用いて，

$$V_{ci}=H_w\int_0^l\left(x_c'\bar{u}_i'+\tfrac{1}{2}\bar{u}_i'^2+\tfrac{1}{2}\bar{v}_i'^2\right)dz+\frac{H_{pi}}{2}\int_0^l\left(x_c'\bar{u}_i'+\tfrac{1}{2}\bar{u}_i'^2+\tfrac{1}{2}\bar{v}_i'^2\right)dz \tag{8}$$

ここに，H_w；ケーブル1本あたりの死荷重張力，H_{pi}；ケーブルiの活荷重張力

吊材はひずまないと仮定したが，図-2に示すように，吊材の伝播する力の水平成分がケーブルと補剛桁の間に生ずる相対変位だけ仕事をすることになる。図-2において吊材の力の水平成分は次式によって与えられる。

$\gamma_i=\frac{P_v+d}{2}\tan\theta_i\doteqdot\frac{P_v+d}{2}\theta_i$ (9) ここに，P_v:補剛桁の鉛直方向活荷重強度，d;ケーブルおよび補剛桁の死荷重

上式における吊材の傾斜角θ_iはケーブルおよび補剛桁の各変位の間の適合条件を満足しなければならない。

$h_f\,\theta_i=v-\bar{v}_i+(a-e)\theta_\zeta$ (10) ここに，h_f;ハンガーの長さ，a；補剛桁の上弦材から図心までの距離

式(9)および式(10)を用いて，吊材のなす仕事は次のように表わされる。

$$V_R=\frac{1}{2}\int_0^l[\gamma_1\{v-\bar{v}_1+(a-e)\theta_\zeta\}+\gamma_2\{v-\bar{v}_2+(a-e)\theta_\zeta\}]dz \tag{11}$$

また，図-2に示すような吊橋の補剛桁およびケーブルに作用する外力のなす仕事は次式となる。

$$W=\int_0^l\left\{(P_v+d)u+P_R v+(m_t-P_R e)\theta_\zeta+\frac{P_c}{2}(\bar{v}_1+\bar{v}_2)\right\}dz \tag{12}$$

以上の式(7)，(8)，(11)および(12)から吊橋全体のポテンシャルエネルギーΠは次のようにえられる。

$$\Pi=V_{c1}+V_{c2}+V_2+V_R-W \tag{13}$$

5.基礎方程式　吊橋の基礎方程式をうるために，最小ポテンシャルエネルギーの原理を適用する。すなわち，$\delta\Pi=0$である。変分原理を用いて式(13)を変形して，非積分項が零であることから境界条件式がえられ，また，積分項δu, δv, $\delta\theta_\zeta$, $\delta\bar{v}_1$および$\delta\bar{v}_2$の任意性から基礎方程式が求められる。これより次の5個の基礎方程式をうる。

$$EI_\eta u^{(4)}+EAK_1^2u-(2H_w+H_{p1}+H_{p2})u''+\frac{b}{2}(H_{p1}-H_{p2})\theta_\zeta''=P_v-(H_{p1}+H_{p2})\frac{8f}{l^2} \tag{14}$$

$$EI_\omega'\theta_\zeta^{(4)}-\left\{GJ+GI_\omega K_1^2-e^2GA+\frac{b^2}{2}(2H_w+H_{p1}+H_{p2})\right\}\theta_\zeta''+EI_\xi K_1^2\theta_\zeta-(GJ+EI_\xi)K_1v''+\frac{b}{2}(H_{p1}-H_{p2})u''+(a-e)\frac{P_v+d}{2}(\theta_1+\theta_2)$$
$$=m_t-P_R e+\frac{b}{2}(H_{p1}-H_{p2})\frac{8f}{l^2} \tag{15}$$

$$EI_\xi v^{(4)}-GI_PK_1^2v''-(GJ+EI_\xi)K_1\theta_\zeta''+\frac{P_v+d}{2}(\theta_1+\theta_2)=P_R \tag{16}$$

$$(H_w+H_{p1})\bar{v}_1''+\frac{P_v+d}{2}\theta_1=-\frac{P_c}{2} \tag{17}$$

$$(H_w+H_{p2})\bar{v}_2''+\frac{P_v+d}{2}\theta_2=-\frac{P_c}{2} \tag{18}$$

ここに，$A=\iint d\xi d\eta$，$I_\eta=\iint\xi^2d\xi d\eta$，$I_\omega=\iint w_n^2d\xi d\eta$，$J=\iint\left(\xi\frac{\partial w_n}{\partial\eta}-\eta\frac{\partial w_n}{\partial\xi}+\xi^2+\eta^2\right)d\xi d\eta$，$I_\omega'=I_\omega-e^2I_\xi$，

$I_P=I_\xi+I_\eta$，b；補剛桁の幅，f；サグ，l；スパン

式(14)～(18)の他に適合条件式として，式(10)の2式が加わる。活荷重張力を決定するためのケーブル方程式がケーブルの傾斜角が載荷後も一定で，また，ケーブルの定着点が不動であることから次のように表わされる。

$H_{Pi}=\frac{E_c A_c}{L_E}\left[\Sigma\left\{z''_c\int_0^l \bar{u}_i dz\right\}+\alpha T L_T\right\}\Big]$ (19)　ここに，$L_E=\int_c^{c'}\sec^3\psi_i dz$，$L_T=\int_c^{c'}\sec^2\psi_i dz$；$\psi_i$；ケーブルの傾斜角，$\alpha$；線膨張係数，$T$；温度変化，$\bar{u}_1=u-\frac{b}{2}\theta_\zeta$，　$\bar{u}_2=u+\frac{b}{2}\theta_\zeta$

以上のようにしてえられた基礎方程式は$K_1=0$とおけば，文献(2)の結果と実質的に合致するものである。

6.計算例　誘導した基礎方程式を用いて，図－1に示す3径間単純吊橋（関門大橋）を対象に3分力を考慮した風荷重を受ける場合の静的挙動を解析する。なお，風荷重はその大きさが変形とともに変化する非保存系であるために厳密には保存系として誘導した基礎方程式は適用できないが，第1近似値として有効であると考えられる．簡単のために左右のケーブルの水平変位が等しい（$\bar{v}_1=\bar{v}_2=\bar{v}$）とおけば，左右の吊材の傾斜角は等しい（$\theta_1=\theta_2=\theta$）とおくことができる。また，断面の図心とせん断中心とは合致するものとする。

吊橋の補剛桁断面の空力特性によって2次元模型による風洞実験から抗力，揚力および空力モーメントの3分力の特性曲線がえられる。これより補剛桁のねじれ角がθ_ζ，風の迎え角がαの場合の抗力，揚力および空力モーメントによる補剛桁およびケーブルの外力が次のように与えられる。

$P_v=-D_t-D_t^*\theta_\zeta$，$P_R=L_T+L_T^*\theta_\zeta$，$m_z=M_t+M_t^*\theta_\zeta$，$P_c=\bar{L}_T$　　(20)　　ここに，$D_t=\frac{1}{2}\rho V^2A_DC_D$，$D_t^*=\frac{1}{2}\rho V^2A_D\left(\frac{dC_D}{d\alpha}\right)_\alpha$
$L_t=\frac{1}{2}\rho V^2A_LC_L$，$L_t^*=\frac{1}{2}\rho V^2A_L\left(\frac{dC_L}{d\alpha}\right)_\alpha$，$M_t^*=\frac{1}{2}\rho V^2A_LC_M$，$M_t^*=\frac{1}{2}\rho V^2A_L\left(\frac{dC_M}{d\alpha}\right)_\alpha$，$\bar{L}_t=\frac{1}{2}\rho V^2A_{Dc}$，$\rho$；空気の密度，$V$；風速(54m/sec)

A_D；補剛桁の有効鉛直投射断面積，A_L；補剛桁の有効水平投射断面積，A_{Dc}；ケーブルの断面積，C_D,C_L,C_M；空気力係数，吊橋のケーブルの形はサグf，f_1なる放物線，中央径間のキャンバーが放物線，側径間のそれは直線とすれば，中央径間および側径間の吊材の長さは次のとおりである。

$h_f(z)=h_T+\frac{4(f+f^*)}{l^2}z^2-\frac{4(f+f^*)}{l}z$（中央径間），　$h_f^*(z)=h_a+\frac{4f_1}{l^2}z^2-\frac{4f_1}{l}\left(1-\frac{h_1}{4f_1}+\frac{f_1^*}{4f_1}\right)z$（側径間）　　(21)

吊橋の塔が変形しないものとすれば，補剛桁およびケーブルの境界条件は次のように表わされる。

$u(0)=u(l)=0$，$u''(0)=u''(l)=0$，$\theta_\zeta(0)=\theta_\zeta(l)=0$，$\theta''_\zeta(0)=\theta''_\zeta(l)=0$，$v(0)=v(l)=0$，$v''(0)=v''(l)=0$，$\bar{v}(0)=\bar{v}(l)=0$，$\theta(0)=\theta(l)=0$　　(22)

上式の境界条件を満足する各変位を次のようにFourier級数に仮定する。

$u(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin n\pi z/l$，$\theta_\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi z/l$，$v(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin n\pi z/l$，$\bar{v}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}d_n\sin n\pi z/l$，$\theta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}e_n\sin n\pi z/l$　　(23)

式(23)を基礎方程式に代入して，Galerkin法を適用すれば未定定数a_n～e_nを求めるための連立方程式がえられるが式(19)のケーブルの活荷重張力H_{Pi}が補剛桁の変形によって定まるために，連立方程式の係数項に未知数H_{Pi}の項が数多く含まれ，かつ荷重が変形に依存するために，計算値は初期値の大きさにきわめて敏感である。$n=1,3,5$の3項近似の場合の中央径間の補剛桁の鉛直，ねじり，水平変位およびケーブルの水平変位を求めれば表－1のとおりである。表のように，風荷重が作用する場合には抗力による補剛桁およびケーブルの水平変位v，$\bar{v}$が卓越することがわかる。キャンバーによる曲率の存在は補剛桁のねじれに影響を及ぼすことがわかる。本法の問題点，非連成法との比較および応力分布については講演時に発表の予定である。最後に本研究を行なうにあたり，吊橋の基礎方程式を力の釣合式から誘導し，貴重な吊橋の諸元のデータをまとめられた元日本道路公団関門架橋工事事務所古道氏（現国際協力事業団），基礎方程式の誘導に際して適確な御助言を頂いた本学築地助教授ならびに卒業研究として御協力頂いた中沖氏（現神戸製鋼構造研究所）ならびに室井氏（現日本道路公団）に記して感謝する次第である。

	$K_1\neq0$				$K_1=0$			
	Hp1=-118(t)		Hp2=-221(t)		Hp1=-182(t)		Hp2=-174(t)	
z/ℓ	u(m)	θ_ζ(rad)	v(m)	$\bar{v}$(m)	u(m)	θ_ζ(rad)	v(m)	$\bar{v}$(m)
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	-0.027	-0.035	1.336	1.120	-0.028	0.019	1.348	1.130
0.2	-0.049	-0.088	2.502	2.143	-0.051	0.020	2.525	2.164
0.3	-0.063	-0.152	3.382	3.021	-0.067	0.003	3.414	3.051
0.4	-0.071	-0.202	3.921	3.665	-0.077	-0.019	3.958	3.701
0.5	-0.074	-0.221	4.102	3.910	-0.080	-0.028	4.141	3.949

表－1　中央径間の補剛桁およびケーブルの変位

参考文献　1)土木学会本州四国連絡橋上部構造研究小委員会解析分科会；本州四国連絡橋上部構造に関する調査報告書,別冊6,吊橋のねじり解析，昭和48年3月，2)日本道路公団関門建設所関門架橋工事事務所，風荷重を受ける吊橋の変形と応力，昭和45年3月，3)倉西・越後；吊橋の側方への変形について，土木学会第29回年次学術講演会講演概要集，第一部，PP.383~384，昭和49年10月，4) K.Washizu ; Some Consideration on a Naturally Curved and Twisted Slender Beam , J.of Math.and Phys.,Vol.43, No.2 , PP.111~116 , 1964