I-193　吊橋の撓度理論における基礎方程式の考察(オ2報)

本州四国連絡橋公団　正会員　林 有一郎

1 まえがき

筆者は従来より吊橋理論の研究[(1),(2),(3)]に従事してきておりその結果①軸力を受ける棒部材は軸剛性と横剛性をもちその横剛性は弦および単振子の復元力剛性と等価なこと②その剛性方程式を用いるとケーブル張力を考慮したケーブル方程式、鉛直方向釣合方程式を導くことができ，③ケーブル張力を無視すると前者は通常のケーブル方程式，後者は線形化されたRodeの式になり④又同じ剛性方程式よりケーブルのポテンシャルエネルギー表示を導けることを示した．この報文はさらに⑤ケーブル張力 H_p の変位によるあらわな表示，⑥ケーブル方程式の新しい導き方，⑦ハミルトンの原理による吊橋の正しい曲げ振動方程式を示し，⑧線形化されていない鉛直方程式は実はケーブルの横剛性を変えただけの線形式であることを示すものである．

2 吊橋の曲げ振動方程式

吊橋の形状、変位を図1のように定義する．添字 c, h, s はケーブル，ハンガー，補剛桁に関するものであることを示す。ケーブルの剛性方程式は次のとおりである。

$$dF_i^c = k_i^c\, dx_i^c \qquad (1)$$

ここに

$$dF_i^c = [H_{pa}, V_{pa}^c, H_{pb}^c, V_{pb}^c]_i^T,\quad dx_i^c = [\xi_a, \eta_a, \xi_b, \eta_b]_i^T$$

$$k_i^c = \begin{bmatrix} k^{cc} & sym. \\ -k^{cc} & k^{cc} \end{bmatrix}_i,\quad k^{cc} = \begin{bmatrix} k_{11}^c & sym. \\ k_{21}^c & k_{22}^c \end{bmatrix},\quad k_{21}^c = \left(\frac{A_cE_c}{L_i} - \frac{T_{wi}^c}{L_i}\right)\sin\alpha_{wi}\cos\alpha_{wi}$$

$$k_{11}^c = \frac{A_cE_c}{L}\cos^2\alpha_w + \frac{T_w^c}{L}\sin^2\alpha_w,\quad k_{22}^c = \frac{A_cE_c}{L}\sin^2\alpha_w + \frac{T_w}{L}\cos^2\alpha_w$$

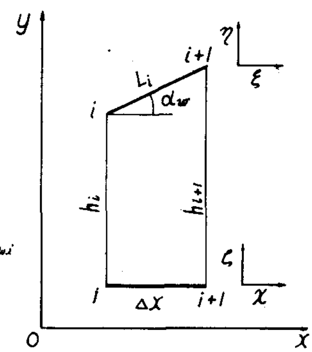

図 1

始めに H_p を変位の関数として表わすことにする．剛性方程式より次式をうる．

$$H_{pi} = k_{11i}^c\,\Delta\xi_i + k_{12i}^c\,\Delta\eta_i$$
$$= (A_cE_c\cos^3\alpha_{wi} + H_w\sin^2\alpha_{wi})\frac{\Delta\xi_i}{\Delta x} + (A_cE_c\cos\alpha_{wi} - H_w)\sin\alpha_{wi}\cos\alpha_{wi}\frac{\Delta\eta_i}{\Delta x}$$
$$\to A_cE_c\cos^3\alpha_w\left(\frac{d\xi}{dx} + \tan\alpha_w\frac{d\eta}{dx}\right) + H_w\sin\alpha_w\cos\alpha_w\left(\tan\alpha_w\frac{d\xi}{dx} - \frac{d\eta}{dx}\right) \qquad (2)$$

この式からケーブル方程式を導く。H_p が一定という仮定がある時にはこの式を $d\xi$ について表わすと

$$d\xi \simeq \left(1 - \frac{H_w}{A_cE_c}\frac{\sin^2\alpha_w}{\cos^2\alpha_w}\right)\left(\frac{H_p}{A_cE_c}\sec^3\alpha_w\,dx - \tan\alpha_w\,d\eta + \frac{H_w}{A_cE_c}\frac{\sin\alpha_w}{\cos^2\alpha_w}\,d\eta\right)$$
$$\simeq \frac{H_p}{A_cE_c}\sec^3\alpha_w\,dx - \tan\alpha_w\frac{d\eta}{dx}dx + \frac{H_w}{A_cE_c}\tan\alpha_w\sec^3\alpha_w\frac{d\eta}{dx}dx \qquad (3)$$

となり、この式の両辺をケーブル不動点間で積分すれば、文献(3)，式(12)のケーブル張力を考慮したケーブル方程式が得られる。

次に吊橋の鉛直面内曲げ振動方程式を導く。ケーブル、ハンガー，補剛桁にたくわえられるポテンシャルエネルギー U と運動エネルギー T は文献(3)を参照して次のように表わされる。

$$U = \frac{A_cE_c}{2}\int_c^{c'}\cos^3\alpha_w\left(\frac{d\xi}{dx} + \tan\alpha_w\frac{d\eta}{dx}\right)^2dx + \frac{H_w}{2}\int_c^{c'}\cos^2\alpha_w\left(\tan\alpha_w\frac{d\xi}{dx} - \frac{d\eta}{dx}\right)^2dx$$
$$+ \frac{1}{2}\int_c^{c'}\left\{a_hE_h\frac{(\eta-\zeta)^2}{h(x)} + w_s\frac{(\zeta-\chi)^2}{h(x)}\right\}dx + \frac{1}{2}\int_c^{c'}E_sI_v\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2}\right)^2dx + \frac{1}{2}\int_c^{c'}E_sA_s\left(\frac{d\chi}{dx}\right)^2dx \qquad (4)$$

$$T = \frac{1}{2}\int_c^{c'}\frac{w_c}{g}(\dot\xi^2 + \dot\eta^2)dx + \frac{1}{2}\int_c^{c'}\frac{w_s}{g}(\dot\chi^2 + \dot\zeta^2)dx$$

ここに

$$a_h = A_h/\Delta x, \quad w_s = T_w^h/\Delta x$$

ハミルトンの原理；

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T-U)dt = 0 \qquad (6)$$

にU，Tを代入し，変分を行うと$\delta\xi$，$\delta\eta$，$\delta\chi$，$\delta\zeta$の任意性から次式をうる。

$$\frac{w_c}{g}\ddot{\xi} - \frac{d}{dx}\left\{A_cE_c\cos^3\alpha_w\left(\frac{d\xi}{dx}+\tan\alpha_w\frac{d\eta}{dx}\right)+H_w\cos\alpha_w\sin\alpha_w\left(\tan\alpha_w\frac{d\xi}{dx}-\frac{d\eta}{dx}\right)\right\}+w_s\frac{\xi-\chi}{h}=0 \qquad (7)$$

$$\frac{w_c}{g}\ddot{\eta} - \frac{d}{dx}\left\{A_cE_c\cos^2\alpha_w\sin\alpha_w\left(\frac{d\xi}{dx}+\tan\alpha_w\frac{d\eta}{dx}\right)-H_w\cos^2\alpha_w\left(\tan\alpha_w\frac{d\xi}{dx}-\frac{d\eta}{dx}\right)\right\}+a_hE_h\frac{\eta-\zeta}{h}=0 \qquad (8)$$

$$\frac{w_s}{g}\ddot{\chi} - w_s\frac{\xi-\chi}{h} - E_sA_s\frac{d^2\chi}{dx^2} = 0 \qquad (9)$$

$$\frac{w_s}{g}\ddot{\zeta} - a_hE_h\frac{\eta-\zeta}{h} + E_sI_v\frac{d^4\zeta}{dx^4} = 0 \qquad (10)$$

この式は複雑なので式(2)を用いて少し変形すると次式をうる。

$$\begin{cases} \text{式 (2)} \\ \frac{w_c}{g}\ddot{\xi} - \frac{dH_p}{dx} + w_s\frac{\xi-\chi}{h} = 0 & (11) \\ \frac{w_c}{g}\ddot{\eta} - \frac{d}{dx}\left(H_p\tan\alpha_w + H_w\sec^2\alpha_w\frac{d\eta}{dx}\right) + a_hE_h\frac{\eta-\zeta}{h} = 0 & (12) \\ \text{式 (9)} \\ \text{式 (10)} \end{cases}$$

従来考察されている式は、これらの式に仮定をつけ加えた時のどこかに位置する。たとえばハンガー伸び，補剛桁，ケーブルの橋軸方向慣性力，補剛桁の軸抵抗力を無視，$\sec^2\alpha_w \simeq 1$なる仮定を設ければ

$$\frac{H_p}{A_cE_c}\int_c^{c'}\sec^3\alpha_w\,dx + \frac{d^2y}{dx^2}\int_c^{c'}\eta\,dx = 0 \qquad (13)$$

$$\frac{w_c+w_s}{g}\ddot{\eta} + E_sI_v\frac{d^4\eta}{dx^4} - H_p\frac{d^2y}{dx^2} - H_w\frac{d^2\eta}{dx^2} = 0 \qquad (14)$$

なる式がえられる。

3 撓度理論式の意味

文献(3)の式(11)によるとケーブルリンクiのa端のケーブル張力増分の鉛直方向成分は

$$V_{pai} = -H_{pai}\left(\tan\alpha_{wi} - \frac{H_w}{A_cE_c}\tan\alpha_{wi}\sec^3\alpha_{wi}\right)+H_w\left(\sec^2\alpha_{wi} - \frac{H_w}{A_cE_c}\tan^2\alpha_{wi}\sec^3\alpha_{wi}\right)\frac{\Delta\eta_i}{\Delta x} \qquad (15)$$

と表わされたがこの式の微小項を無視して（線形化されたRodeの式の基となる。）行列表示すると

$$[H_{pa}, V_{pa}][\sin\alpha_w, -\cos\alpha_w]^T = \frac{T_w}{L}\frac{\Delta\eta}{\cos\alpha_w} \qquad (16)$$

なる式がえられ，$[\sin\alpha_w, -\cos\alpha_w]^T$はケーブル軸と直角な単位ベクトルであるから、線形化されたRodeの式はケーブル節点力はケーブルの横剛性によって生ずるということを表わしていることになる。Rodeはこの仮定を

$$[d\xi, d\eta][dx, dy]^T = 0$$

なる式で行なっている。線形化されていないRodeの式はケーブルの横剛性に$(T_w+T_p)/L$を用いたことと等価であり，線形化されていないMelanの式はケーブルの横剛性に$\frac{(T_w+T_p)\cos^2\alpha_w}{L}$を使っており$\cos^2\alpha_w$の分だけケーブル剛性を弱く評価している。図においてacが軸剛性，adが横剛性による力を表わし，aeが式(15)と等価である。Rodeの式は節点力をadと仮定する。横剛性の中のケーブル張力はT_w又はT_w+T_pと仮定される。

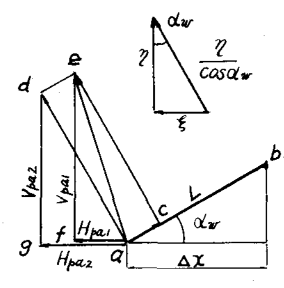

図2

参考文献

(1) 林，"有限変形還元法によるケーブル解析"，才25回年次講演会，昭和45年10月

(2) 林，保田，"吊橋の振動解析"，才28回年次講演会，昭和48年10月

(3) 林，"吊橋の撓度理論における基礎方程式の考察"，才29回年次講演会，昭和49年10月