

大成建設 ○正員 大坂 一
大成建設 正員 浜田 政則

1. まえがき

現在、大型のタンクが数多く建設されている。地震時にこれ等のタンクが破損した場合、その影響は事業所内のみにとどまらず広域に及ぶ危険性がある。本文ではタンク液面の動揺振動解析に関する基本的な計算条件の影響について検討を加えた。すなわち、微小振幅表面波理論解析における重ね合せモード次数の影響、摂動法を用いた有限振幅表面波理論解析における高次項の影響等について検討を行なった。

2. 基礎式

半径Rの円筒形タンクに、高さHまで非圧縮性完全流体が入っている時にx方向に $-ax$ の、y方向に $-ay$ の加速度が作用したものとす。この時タンクを剛体とし、座標系を図-1のようにとると液体の運動の基礎式は次の5つの式で与えられる。

- (1) タンクの内部で連続の式より $\Delta\phi = 0$
- (2) タンクの壁面 $r = R$ で $\phi_{,r} = 0$
- (3) タンクの底面 $Z = H$ で $\dot{\phi}_{,z} = 0$
- (4) 自由表面 $Z = \zeta$ で $\zeta + (\nabla\phi, \nabla\zeta) = \phi_{,z}$
- (5) 自由表面で $\dot{\phi} + \frac{1}{2}(\nabla\phi, \nabla\phi) = axX + ayY - g\zeta + f(t)$

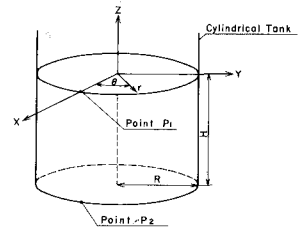


Fig-1 Coordinate System of Cylindrical Tank

ここで ϕ は速度ポテンシャル、 ζ は波高、 g は重力加速度、 \cdot は時間に関する微分、 \cdot はxに関する微分、 $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ 、 $f(t)$ は境界条件によって定まる時間による定数とする。速度ポテンシャルを次のようにテーラー展開し、さらに速度ポテンシャルと波高の摂動をとる。

$$(6) \phi(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi^{(n)} Z^n \quad (7) \phi = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i \phi_i \quad (8) \zeta = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i \zeta_i$$

ここで変数は必要な変数のみを明記してあり、 ϵ は摂動パラメーター(n)はZに関するn回微分を意味する。上式を使用すると(4)、(5)式は $Z = 0$ 上で次のように展開される。

$$(9) \epsilon^i \zeta_i + \epsilon^{i+k+nj} \frac{1}{n!} (\nabla \phi_i^{(n)} \zeta_j^n, \nabla \zeta_k) = \epsilon^{i+nj} \frac{1}{n!} \phi_i^{(n+1)} \zeta_j^n$$

$$(10) \epsilon^{i+nj} \frac{1}{n!} \dot{\phi}_i^{(n)} \zeta_j^n + \frac{1}{2} \epsilon^{i+k+nj+m\ell} \frac{1}{n! m!} (\nabla \phi_i^{(n)}, \nabla \phi_k^{(m)}) \zeta_j^n \zeta_\ell^m = a_x x + a_y y - g \epsilon^i \zeta_i$$

外力項を $A_x = Ax/\epsilon$ 、 $A_y = Ay/\epsilon$ とすると各摂動項に対する基礎式を得ることができる。特に0次の項に対しては外力項が0となることから、初期条件として $\phi_0 = 0$ 、 $\dot{\phi}_0 = 0$ 、 $\zeta_0 = 0$ 、 $\dot{\zeta}_0 = 0$ となることより、 $\phi_0 = 0$ 、 $\zeta_0 = 0$ となる。このことから1次、2次、3次摂動項に対する基礎式(4)、(5)は $Z = 0$ 上で次のようになる。

$$\begin{aligned} \epsilon^1 & \dot{\zeta}_1 = \phi_{1,z} & \epsilon^2 & \dot{\zeta}_2 = \phi_{2,z} + \phi_{1,z\zeta} \zeta_1 - (\nabla \phi_1, \nabla \zeta_1) \\ & \phi_1 + g \zeta_1 = A_x x + A_y y & & \dot{\phi}_2 + g \dot{\zeta}_2 = -\phi_{1,z} \zeta_1 - \frac{1}{2} (\nabla \phi_1, \nabla \phi_1) \\ \epsilon^3 & \dot{\zeta}_3 = \phi_{3,z} + \phi_{2,z\zeta} \zeta_1 + \phi_{1,z\zeta} \zeta_2 + \frac{1}{2} \phi_{1,z\zeta\zeta} \zeta_1^2 - (\nabla \phi_2, \nabla \zeta_1) - (\nabla \phi_1, \nabla \zeta_2) - (\nabla \phi_{1,z}, \nabla \zeta_1) \zeta_1 \\ & \dot{\phi}_3 + g \dot{\zeta}_3 = -\phi_{2,z} \zeta_1 - \phi_{1,z} \zeta_2 - \frac{1}{2} \phi_{1,z\zeta} \zeta_1^2 - (\nabla \phi_1, \nabla \phi_2) - (\nabla \phi_{1,z}, \nabla \phi_1) \zeta_1 \end{aligned}$$

1次摂動項は微小振幅表面波の式と一致する。

摂動パラメーター ϵ を1として, 1次, 2次摂動項に対し, モード解析を行なうと, 一次項に対しては解として次式を得る。

$$\Phi_1 = \sum_i \{ A_i(t) \cos \theta + B_i(t) \sin \theta \} J_i(k_i r) \cosh(k_i(z+H))$$

$$\ddot{A}_i + \omega_i^2 A_i = \beta_i \dot{a}_x \quad k_i = \frac{\epsilon_i}{R} \quad \beta_i = \frac{2R}{J_i(\epsilon_i)(\epsilon_i^2 - 1) \cosh(k_i H)}$$

$$\ddot{B}_i + \omega_i^2 B_i = \beta_i \dot{a}_y \quad \omega_i^2 = g k_i \tanh(k_i H)$$

2次項に対しては次のようになる。

$$\Phi_2 = \sum_i \{ C_i(t) J_0(k_{0i} r) \cosh(k_{0i}(z+H)) + (D_i(t) \cos 2\theta + E_i(t) \sin 2\theta) J_2(k_{2i} r) \cosh(k_{2i}(z+H)) \}$$

$$\ddot{C}_i + \omega_{0i}^2 C_i = \beta_{0i} g_{0i} \quad k_{0i} = \frac{\epsilon_{0i}}{R} \quad k_{2i} = \frac{\epsilon_{2i}}{R} \quad \beta_{0i} = \frac{2}{R^2 J_0^2(\epsilon_{0i}) \cosh(k_{0i} H)}$$

$$\ddot{D}_i + \omega_{2i}^2 D_i = \beta_{2i} g_{2i} \quad \omega_{0i}^2 = g k_{0i} \tanh(k_{0i} H) \quad \omega_{2i}^2 = g k_{2i} \tanh(k_{2i} H) \quad \beta_{2i} = \frac{2 \epsilon_{2i}^2}{R^2 (\epsilon_{2i}^2 - 4) J_2^2(\epsilon_{2i}) \cosh(k_{2i} H)}$$

$$\ddot{E}_i + \omega_{2i}^2 E_i = \beta_{2i} g_{2i} \quad \omega_{2i}^2 = g k_{2i} \tanh(k_{2i} H)$$

ここで J_i は i 次のベッセル関数, $\epsilon_i, \epsilon_{0i}, \epsilon_{2i}$ はそれぞれ $J_1(r) = 0, J_0(r) = 0, J_2(r) = 0$ となる $r \neq 0$ の i 番目の根である。2次項に対する荷重 g_{0n}, g_{2n} は次式で与えられる。

$$g_{0n} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_j (A_n A_j + a_y B_j) \{ k_j \cosh(k_j H) J_0(k_j r) - k_j^2 \cosh(k_j H) r J_1(k_j r) \} - \sum_j (\dot{A}_j A_j + \dot{B}_j B_j) k_j k_j \{ \cosh(k_j H) \cosh(k_j H) (J_0(k_j r) J_0(k_j r) + J_2(k_j r) J_2(k_j r)) + (2 \sinh(k_j H) \sinh(k_j H) - k_j \cosh(k_j H) \cosh(k_j H)) J_1(k_j r) J_1(k_j r) \} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_j (\dot{A}_j \dot{A}_j + \dot{B}_j \dot{B}_j) k_j k_j \cosh(k_j H) \sinh(k_j H) J_1(k_j r) J_1(k_j r) - \frac{1}{2} \sum_j (A_n \dot{A}_j + a_y \dot{B}_j) k_j \sinh(k_j H) r J_1(k_j r) J_1(k_j r) \right. \\ \left. + r J_0(k_{0n} r) dr \right.$$

$$g_{2n} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \left\{ - (A_n A_i - a_y B_i) \{ k_i \cosh(k_i H) + k_i^2 \cosh(k_i H) r J_1(k_i r) \} + \sum_j (\dot{A}_j A_j - \dot{B}_j B_j) k_j k_j \{ \cosh(k_j H) \cosh(k_j H) (J_0(k_j r) J_2(k_j r) + J_2(k_j r) J_0(k_j r)) - (2 \sinh(k_j H) \sinh(k_j H) - k_j \cosh(k_j H) \cosh(k_j H)) J_1(k_j r) J_1(k_j r) \} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_j (\dot{A}_j \dot{A}_j - \dot{B}_j \dot{B}_j) k_j k_j \cosh(k_j H) \sinh(k_j H) J_1(k_j r) J_1(k_j r) - \frac{1}{2} \sum_j (A_n \dot{A}_j - a_y \dot{B}_j) k_j \sinh(k_j H) r J_1(k_j r) J_1(k_j r) \right. \\ \left. + r J_2(k_{2n} r) \right\} r J_2(k_{2n} r) dr$$

g_{sn} は g_{cn} の A_i, B_i に関する項が異なるだけで, 同じ形になる。

3. 微小振幅表面波のモード解析

構造物の耐震解析をモーダルアナリシスを使用して行なう時には, 普通低次の振動モードだけを考慮する。これは入力波の卓越周期が構造物の固有周期より長くなるからである。しかし, 液面振動の固有周期は構造物に比べて長くなる。そこでモード数による解の差を調べるため, タンクを x 方向に $-a \cos \omega t$ の加速度で加振する。微小振幅表面波による波高, 圧力は次のようになる。

$$(A) \quad \zeta = \frac{\alpha}{g} \left[r \cos(\omega t) - \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i J_i(k_i r) \cosh(k_i H) \left(\frac{\eta_i^2}{\eta_i^2 - 1} \cos(\omega t) + \frac{1}{1 - \eta_i^2} \cos(\omega_i t) \right) \right] \cos \theta$$

$$P = \rho g \frac{\alpha}{g} \left[r \cos(\omega t) - \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i J_i(k_i r) \cosh(k_i H) \left(\frac{\eta_i^2}{\eta_i^2 - 1} \cos(\omega t) + \frac{1}{1 - \eta_i^2} \cos(\omega_i t) \right) \right] \cos \theta$$

ここで $\eta_i = \omega/\omega_i$, ρ は密度である。 r をフーリエ・ベッセル展開すると, 波高は次のように変換できる。

$$(B) \quad \zeta = \frac{\alpha R}{g} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 J_2(k_i r)}{(\epsilon_i^2 - 1) J_1(\epsilon_i) (1 - \eta_i^2)} (\cos(\omega t) - \cos(\omega_i t))$$

(B) 式より, $\eta_i \ll 1$ までモードをとった時の最大波高に対する誤差の評価式として次式を得る。

$$(11) \quad \frac{|\zeta - \zeta_n|}{\max |\zeta|} \approx \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{2}{\epsilon_i^2 - 1} \right) \frac{\alpha R}{g} / \max |\zeta_n|$$

$1 - \sum_{i=1}^n \frac{2}{\epsilon_i^2 - 1}$ は5次までで0.03, 20次までで0.01, 200次までで0.001の値をとる。又,

$\alpha R / (g \max |\zeta_n|)$ は入力波の周期が短くなる程大きくなるので, 高次のモードまで計算しなければならない。

図-2, 図-4は半径10m, 液深5mのタンクにそれぞれ最大加速度 αg_{al} の周期1.1秒, 3.0秒の波を

入力した時の点P₁（図-1）における波高をプロットしたものである。タンクの固有周期は1次，5.49秒，2次，2.76秒，10次，1.15秒，11次，1.09秒である。図-3は周期1.1秒の入力波の時に加振開始から1秒後の点P₁における波高と点P₂における圧力を1次から，20次のモードまでを使用して計算した値である。これらの図より，周期1.1秒の入力波に対し，波高は13～15次，圧力は2次で収束していることがわかる。又周期3.0秒の入力波に対しては4次モードで収束している。図-5は清水市で観測された，11月30日に鳥島沖で発生したマグニチュード7の地震波とスペクトルであり，1秒以上の長周期成分が卓越している。この地震波によるP₁での波高の応答が図-6に示してある。4次モードで十分に良好な結果が得られている。

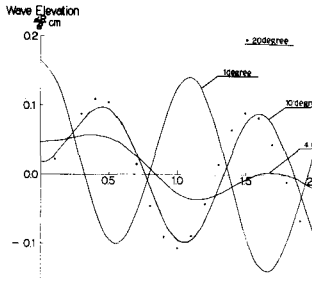


Fig-2 Response of Wave Elevation at Point P₁ to a Cosine Wave with Period 1.1sec

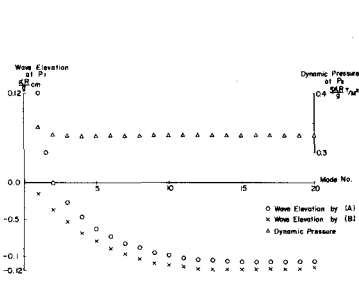


Fig-3 Convergency w.r.t Computed Mode Numbers

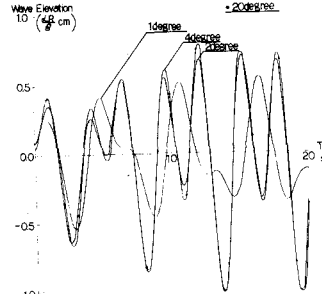


Fig-4 Response of Wave Elevation at Point P₁ to a Cosine Wave with Period 3.0 sec

4. 2次摂動項の影響

図-7，図-8は最大加速度10 galの一次固有周期と同周期のコサイン波を入力して共振した時の点P₁における波高とP₂の圧力を示している。一次項は線形的に増加し，2次項は時間の二乗に比例して増加している。波高は23.75秒で一次項1.1mに対し2次項0.12mの値をとり，2次項まで考慮すると壁面での波高が1割高くなっている。一方圧力では2次高が圧力を小さくするように働いている。

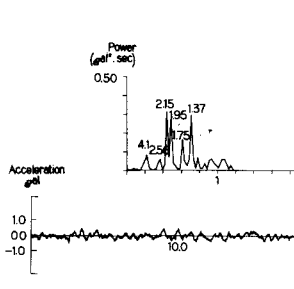


Fig-5 Acceleration Record and Power Spectrum at SHIMIZU A-9-X-A

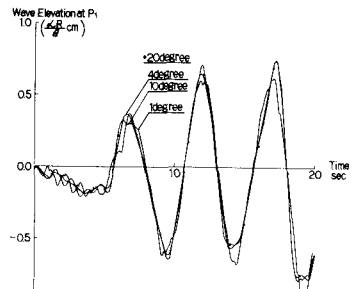


Fig-6 Response of Wave Elevation at Point P₁ to a SHIMIZU A-9-X-A

の値をとり，2次項まで考慮すると壁面での波高が1割高くなっている。一方圧力では2次高が圧力を小さくするように働いている。

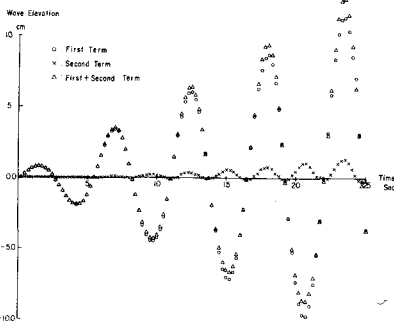


Fig-7 Response of Wave Elevation at Point P₁ Using Perturbed First and Second Term to a Cosine Wave with maximum Acceleration 10 gal and Period 5.489 Second

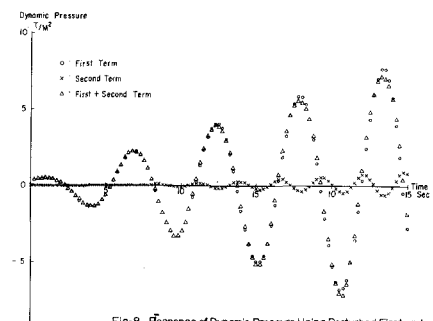


Fig-8 Response of Dynamic Pressure Using Perturbed First and Second Term to a Cosine Wave

5. あとがき

以上のことから次のような結論を導びくことができる。

- 1) 波高の応答を求める時は入力波の卓越周期に対し，十分なモードを考慮しなければならない。
- 2) 圧力の応答に対しては高次のモードまで考慮する必要はない。
- 3) 微小振幅波や2次項に対する共振状態が発生する時には2次項まで考慮して波高の応答計算をした方がよい。

今後，実験による検証を行なうと同時に，減衰項，2次項の影響，さらには非定常応答計算時の圧力によるタンクの最大応力を求める方法を研究して行きたい。