I-178　任意境界を有する表層地盤の震動解析手法

京都大学防災研究所　正員　佐藤忠信

まえがき

表層地盤の震動特性を調べる場合，地盤を水平な成層構造をもつものとして，重複反射理論を用いて解析することが多い。しかし，普通の地盤は複雑な地層構成を有し，単純な成層モデルで行なった解析だけでは，十分にその震動特性をとらえることの出来ない場合が生ずると考えられる。一方，地盤を有限な振動系に置き換えることによって，複雑な地盤構成系の振動問題を解析する方法があるが，この場合には地盤を有限な領域で区切らなければならないから，この結果できる境界がどこに位置するかによって，系の振動特性にかなりの差を生ずる。これは入射した波動が境界で反射を繰り返し，波動のエネルギーが振動系の中に閉じ込められるため，無限遠方に伝わる波動によるエネルギーの逸散現象を考慮することが出来ないからである。

このような観点から，Lysmer ら[1]は逸散する波動の形態を限定することによって，逸散減衰を有限な振動系に組み込む手法について考察を加えている。また Tsai ら[2]は SH 波の重複反射問題を有限な振動系に置き換える手法を示している。しかしながら，境界を通って任意の波動が入射する場合の震動問題に適用できる解析手法はまだ明らかにされていないようである。ここでは基盤層が線形弾性体から構成されているものとし，表層と基盤層との境界で成立する条件を積分方程式に変換することによって無限遠方に逸散する波動による減衰効果を有限要素解析に組み込めることを示す。

1．積分方程式による境界値問題の解析法

いま，半無限弾性体を考え，図-1 に示すように，x_1, x_2 軸を地表面に沿って取り，x_3 軸を深さ方向に取ることにする。点 R の x_k 軸方向に $\delta(x_k - r_k)e^{i\omega t}$ なる集中力が作用したときの点 Q における x_j 方向の変位ならびに力を U_{jk}, P_{jk} と表わせば，これは半無限弾性体の主要解になっている。

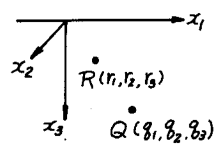

図-1

この主要解を用いることによって動的弾性問題の境界値問題が以下のように解析できる。図-2 に示したような領域 V 上の表面 S に表面力 $\mathbf{t}e^{i\omega t}$ $(\mathbf{t} = \{t_1, t_2, t_3\})$ あるいは表面変位 $\mathbf{u}e^{i\omega t}$ $(\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\})$ が与えられた場合を考える。積分方程式による解析法は，Oliveira[3]，円羽・小林・福田[4]などによる手法を用いれば，問題とする領域外に設けられた補助境界 S^* 上に分布する集中力の密度 $\boldsymbol{\phi}\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ を S 上の境界条件を満すように決定する問題に帰着される。

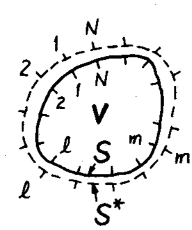

図-2

いま，境界 S と補助境界 S^* を N 個の節点に分割すれば，補助境界上の節点上に分布する集中力の密度 $\boldsymbol{\Phi}$ を決定する連立方程式が次式のように与えられる。

(1) 表面力が与えられる場合

$$\mathbb{T} = \mathbb{L}\boldsymbol{\Phi} \quad ,\text{ただし}\quad \mathbb{T}_m = \{\mathbf{t}\}_m,\ \boldsymbol{\Phi}_\ell = \{\boldsymbol{\phi}\}_\ell \quad ,\ \mathbb{L}_{\ell m} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}_{\ell m} \qquad (1)$$

(2) 表面変位が与えられる場合

$$\mathbb{U} = \mathbb{D}\boldsymbol{\Phi} \quad ,\text{ただし}\quad \mathbb{U}_m = \{\mathbf{u}\}_m,\ \boldsymbol{\Phi}_\ell = \{\boldsymbol{\phi}\}_\ell \quad ,\ \mathbb{D}_{\ell m} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{bmatrix}_{\ell m} \qquad (2)$$

$$\{\ell, m = 1, 2, \cdots\cdots N\}$$

ここに，$\{\mathbf{t}\}_m, \{\mathbf{u}\}_m$ は各々 S 上の節点 m に作用する節点力と節点変位を表わし，$\{\boldsymbol{\phi}\}_\ell$ は S^* 上の節点 ℓ における $\boldsymbol{\phi}$ の分布強度を表わしている。したがって $\mathbb{T}, \mathbb{U}, \boldsymbol{\Phi}$ なるベクトルは $3N$ 個の成分をもつ

ことになる。また，$\mathbb{L}_{me}$，$\mathbb{D}_{me}$ は各々 S^*上の ℓ 節点に単位の集中力が作用したときの S 上の m 節点における力と変位を表わすマトリックスである。したがって $\mathbb{L}$ ならびに D は $3N\times3N$ の成分をもつ正方マトリックスになっている。

2．有限要素解析への地下逸散減衰の導入

ここで対象とする地盤は図-3(a) に示すように半無限に広がる弾性基盤 B 上に A のような表層地盤が載っているようなものである。

いま，表層地盤 A を図-3(d) に示すように有限要素に分割して，震動解析を行なうものとすれば，A 部分の振動方程式は次式のように与えられる。

$$(-\omega^2\mathbb{M}+i\omega\mathbb{C}+\mathbb{K})\,\boldsymbol{\delta}=\mathbb{F} \qquad (3)$$

ここに，$\mathbb{M}$，$\mathbb{C}$，$\mathbb{K}$ は各々，質量，粘性係数，剛性マトリックス，$\boldsymbol{\delta}$ は節点変位ベクトル，$\mathbb{F}$ は節点に作用する外力ベクトル，ω は円振動数，$i=\sqrt{-1}$ である。

ここで，$\boldsymbol{\delta}$ と $\mathbb{F}$ を S 上の節点とそれ以外の節点のものに分離し，S 上のものを $\boldsymbol{\delta}_b$，$\mathbb{F}_b$ とし，それ以外のものを $\boldsymbol{\delta}_s$，$\mathbb{F}_s$ とすれば，式(3)は次式となる。

$$\left(-\omega^2\begin{bmatrix}\mathbb{M}_{bb} & \mathbb{M}_c\\ \mathbb{M}_c^T & \mathbb{M}_s\end{bmatrix}+i\omega\begin{bmatrix}\mathbb{C}_{bb} & \mathbb{C}_c\\ \mathbb{C}_c^T & \mathbb{C}_s\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbb{K}_{bb} & \mathbb{K}_c\\ \mathbb{K}_c^T & \mathbb{K}_s\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\delta}_b\\ \boldsymbol{\delta}_s\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbb{F}_b\\ \mathbb{F}_s\end{Bmatrix} \qquad (4)$$

なお，図-3(b) に示すように，$\ell-\ell'$ を地表面と考えた半無限弾性体に g なる波動が入射したときの S 面上の節点 1, 2, ……, M に対応する点での力と変位のベクトルを各々 $\mathbb{f}_b$，$\mathbb{d}_b$ と表わすものとする。

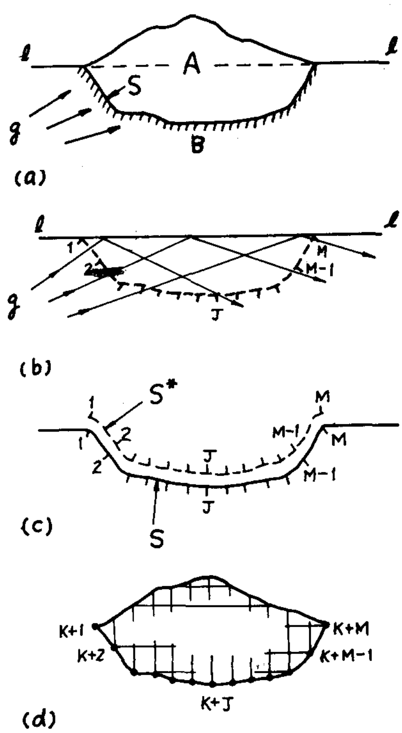

図-3　表層地盤の有限要素化

つぎに，図-3(c) に示すように，表層地盤 A を取り除いた基盤層 B の部分のみを考えると，この部分の応力と変位場を求めるためには，図-3(b) のような変位と応力場に，S 面上の境界条件を満すような場を重ね合せればよい。すなわち，S 面上の節点変位が $\boldsymbol{\delta}_b-\mathbb{d}_b$，節点に作用する外力が $\mathbb{F}_b-\mathbb{f}_b$ になるような場を重ね合せることになる。このような場の解を求めるためには，補助境界 S^* 上の集中力の分布密度ベクトル $\boldsymbol{\Phi}_b$ を求めればよいから，式(1)，(2) を考慮して次式をうる。

$$\boldsymbol{\delta}_b-\mathbb{d}_b=\mathbb{D}_b\boldsymbol{\Phi}_b \qquad (5) \qquad\qquad \mathbb{F}_b-\mathbb{f}_b=\mathbb{L}_b\boldsymbol{\Phi}_b \qquad (6)$$

式(5)，(6) より $\boldsymbol{\Phi}_b$ を消去することによって，境界面 S 上での節点変位と節点外力ベクトルとの関係式が次式のように与えられる。

$$\mathbb{F}_b=(\mathbb{K}_b^*+i\omega\,\mathbb{C}_b^*)\,\boldsymbol{\delta}_b+\mathbb{F}_b^* \qquad (7)$$

ここに，

$$\mathbb{L}_b\mathbb{D}_b^{-1}=\mathbb{K}_b^*+i\omega\,\mathbb{C}_b^*\quad,\quad \mathbb{F}_b^*=\mathbb{f}_b-\mathbb{L}_b\mathbb{D}_b^{-1}\mathbb{d}_b \qquad (8)$$

式(7)，(8) を用いれば，式(4) は次式のように書きなおせる。

$$\left(-\omega^2\begin{bmatrix}\mathbb{M}_{bb} & \mathbb{M}_c\\ \mathbb{M}_c^T & \mathbb{M}_s\end{bmatrix}+i\omega\begin{bmatrix}\mathbb{C}_{bb}-\mathbb{C}_b^* & \mathbb{C}_c\\ \mathbb{C}_c^T & \mathbb{C}_s\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbb{K}_{bb}-\mathbb{K}_b^* & \mathbb{K}_c\\ \mathbb{K}_c^T & \mathbb{K}_s\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\delta}_b\\ \boldsymbol{\delta}_s\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbb{F}_b^*\\ \mathbb{F}_s\end{Bmatrix} \qquad (9)$$

式(4) と式(9) を比較すると，粘性係数ならびに剛性マトリックスが $\mathbb{C}_b^*$，$\mathbb{K}_b^*$ だけ変化し，外力ベクトルが $\mathbb{F}_b$ から $\mathbb{F}_b^*$ へ変化したことがわかる。

3．一次元問題への適用

半無限弾性体を考え，地震動は x_3 軸に平行に鉛直下方から一様に入射する SH 波とすれば，周波数領域にお

ける地盤の運動方程式は次式のようになる。

$$\frac{d^2u}{dx_3^2}+\alpha^2 u=0 \qquad \alpha=\frac{\omega}{c} \tag{10}$$

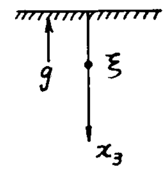

図-4

ここに，c はせん断波速度である。いま入射する波動を $g=Ae^{i\omega(t+\alpha x_3)}$ とすれば，周波数領域における変位 $u(x_3)$ ならびにせん断応力 $\tau(x_3)$ は次式のようになる。

$$u(x_3)=2A\cos\alpha x_3 \quad , \quad \tau(x_3)=-2\rho\omega cA\sin\alpha x_3 \tag{11}$$

また，深さ ξ に集中力 $\delta(x_3-\xi)e^{i\omega t}$ を作用させた場合の式(10)の解は，主要解になっているが，これは $x_3>\xi$ の領域で次式のように与えられる。

$$U(x_3,\xi)=(i/\alpha)e^{-i\alpha x_3}\cos\alpha\xi \quad , \quad P(x_3,\xi)=(\rho c\omega/\alpha)e^{-i\alpha x_3}\cos\alpha\xi \tag{12}$$

つぎに，図-5に示すように深さ H の表層地盤を考え，これを有限な節点から構成される振動系に置き換えた場合を考える。この場合には，式(12)に $x_3=H$ を代入し次式が得られる。

$$L_b D_b^{-1}=P(H,\xi)/U(H,\xi)=-i\rho c\omega \tag{13}$$

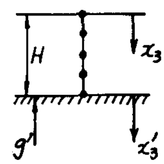

図-5

1次元問題を取り扱っているから，式(7),(8)などに現われる $\mathbb{F}_b,\mathbb{F}_b^*,\mathbb{L}_b,\mathbb{D}_b$ などの添字 b の付いた変数はすべてスカラー量になる。したがって，以下では，これらの変量は細字で表わすことにする。式(13)を式(7),(8)に代入すれば次式をうる。

$$F_b=i\rho c\omega(2Ae^{i\alpha H}-\delta_b) \tag{14}$$

$$K_b^*=0 \quad , \quad C_b^*=\rho c \quad , \quad F_b^*=2i\rho c\omega Ae^{i\alpha H} \tag{15}$$

一方，新たに基盤層の座標軸 x_3' を取り，基盤層上端での入射波の振幅を A' とすれば次式をうる。

$$A'=Ae^{i\alpha H} \tag{16}$$

したがって，式(14)は次式のように表わせる。

$$F_b=i\rho c\omega(2A'-\delta_b) \tag{17}$$

式(17)を式(9)に代入すれば，図-5に示した層厚 H の表層地盤の振動方程式は次式となる。

$$\left(-\omega^2\begin{bmatrix}M_{bb} & \mathbb{M}_c\\ \mathbb{M}_c^T & \mathbb{M}_s\end{bmatrix}+i\omega\begin{bmatrix}C_{bb}+\rho c & \mathbb{C}_c\\ \mathbb{C}_c^T & \mathbb{C}_s\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}K_{bb} & \mathbb{K}_c\\ \mathbb{K}_c^T & \mathbb{K}_s\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}\delta_b\\ \boldsymbol{\delta}_s\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2iA'\rho c\omega\\ \mathbb{F}_s\end{Bmatrix} \tag{18}$$

図-6は式(18)を用いて表層地盤の周波数伝達特性を調べたものである。基盤層のせん断波速度720m/sec, $\rho g=2.3$t/m³ 表層のせん断波速度160m/sec, $\rho g=2.24$t/m³とした場合の，地表面の応答倍率が示されている。図から明らかなように表層の分割数を増すにつれて，重複反射理論から求まる厳密解へ近ずくことが明らかである。

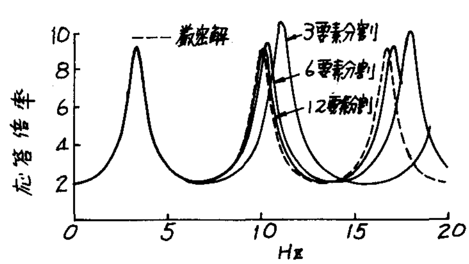

図-6 地表面の応答倍率

あとがき

以上，仮想境界を有する表層地盤の震動解析手法を示し1次元問題に適用した結果，厳密解とよい一致が得られることを示したが，基盤層は均質な弾性体からなるものと仮定している。実際には異方性をもつ多層構造を有しているはずであるから，このような場合の主要解をいかにして求めるかが，この種の解析法の鍵になる。今後このような点を考慮して，2次元，3次元問題の解析を進めるつもりである。

謝辞： 本研究に着手するための端緒を与えられた京都大学助教授土岐憲三先生に感謝します。

参考文献 1) Lysmer, J. & G. Waas , ASCE , vol. 98, EM.1 , pp. 85-105, 1972.

2) Tsai, N.C. & G.W. Housner , BSSA , Vol. 60 , No. 5 , pp. 1625-1651, 1970.

3) Oliveira , E.R. , ASCE , Vol. 94 , EM.1 , pp. 79-101 , 1968.

4) 丹羽・小林・横田 , 土木学会論文報告集 , 第195号 , pp. 27-35, 1971.