

東京工業大学 正員 ○吉田 裕
日本国有鉄道 正員 村田 修

1. はじめに

本研究は、これまでに用いられてきた数値積分法とは本質的に異なる位置づけにあると考えられる運動方程式の数値積分法を提案するものである。すなわち、本方法の基本的なアイディアは初期値問題としての変位 x に関する2階の微分方程式を、新たに導入する変数 φ に関する4階の微分方程式の境界値問題として解こうとするものである。まず、支配方程式と等価な変分汎関数を与える。つぎに、与えられた変分汎関数に基づいて有限要素法を適用して得られる運動方程式の解法のアルゴリズムを提案する。動的応答解析における外力項は一般に地震入力波などとしてあらかじめ与えられる確定外力であり、このような場合には本方法は妥当である。

2. 基礎方程式

有限自由度系に理想化された構造に動的な外力 \bar{F} が作用するとき、系の運動を支配する運動方程式は式(1)のようにならされる。ここに、 x は構造の変位ベクトル、 $\dot{x} \equiv dx/dt$ 、 $\alpha x + \beta \dot{x} + \gamma x = \bar{F}(t)$ (1)

α は質量マトリックス、 β は減衰マトリックス、 γ は剛性マトリックス $x|_{t=0} = x_0, \dot{x}|_{t=0} = \dot{x}_0$ (2)

\bar{F} は与えられる外力のベクトル、である。ここで、新たに変数のベクトル φ を導入し、変位ベクトル x を式(3)のように、式(1)と共役な形で定義する。式(3)を式(1)に代入すると式(4)のよう $x = \alpha^T \varphi - \beta^T \dot{\varphi} + \gamma^T \varphi$ (3)

な4階の微分方程式が得られる。 $\alpha \alpha^T \ddot{\varphi} - (\alpha \beta^T - \beta \alpha^T) \ddot{\varphi} + (\alpha \gamma^T + \gamma \alpha^T - \beta \beta^T) \dot{\varphi} + (\beta \gamma^T - \gamma \beta^T) \dot{\varphi} + \gamma \gamma^T \varphi = \bar{F}$ (4)

3. 基礎方程式と等価な変分汎関数

有限の時間領域 $0 \leq t \leq T$ を対象とするものとすれば、式(4)の基礎方程式を Euler 方程式として与え、初期条件として与えられる x および \dot{x} に対応する関数を自然境界条件として与えるような変分汎関数 Π を式(5)のようにならされる。 $\Pi = \int_0^T \{ \frac{1}{2} (\alpha^T \ddot{\varphi} - \beta^T \dot{\varphi} + \gamma^T \varphi)^T (\alpha^T \ddot{\varphi} - \beta^T \dot{\varphi} + \gamma^T \varphi) - \varphi^T \bar{F} \} dt$

4. 有限要素法による定式化

対象時間領域を有限の数の部分領域の集合として理想化し、各部分領域間に設定される節点に基本変数のベクトル φ および $\dot{\varphi}$ を節点変数として式(6)のように導入する。各時間要素内の変数ベクトル φ を3次の多項式で式(7)のように補間することにより、通常のマトリックス法の技法に基づいて $u_i = [\varphi^T \quad (\dot{\varphi})^T]_i$ (6)

要素剛性マトリックスを誘導することができる。 $\varphi = \sum_{R=0}^3 a_R t^R$ (7)

5. 数値計算例

固有振動数 $\omega = 1.0$ の1自由度系を対象として、減衰定数 $\delta = 5\%$ の場合の自由振動について、(1) Duhamel 積分 (2) Newmark β 法、(3) Wilson θ 法、の各計算法で数値積分を行ない、ここに提案したアルゴリズムによる結果と比較したものが図1である。強震記録(1940年 El Centro NS)を入力波として、1自由度系の応答を上記の3つの積分法で計算し、ここに提案した方法による結果と比較したものが図2である。図3(c)に示した1自由度系 ($m_i = 4.5 \times 10^4 \text{ kg}$, $h_i = 4.5 \times 10^2 \text{ cm}$, $EI_i = 4.2 \times 10^{10} \text{ kg cm}^2$) に、初期条件として最上部の質点に 10 cm の変位を与えた場合の自由振動を、(1) モード解析を行なった後 Duhamel 積分を行なう方法、(2) Newmark β 法、によって解析した結果を、ここに提案する方法による結果と比較したものが図3である。モード解析による方法は正解と見做せる。しかし、このグラフから $\Delta t = 0.1$ 秒 ($\Delta t / \text{最小固有周期} = 1/2$) の場合でも、ここに提案したアルゴリズムによる積分結果が非常に良好であることが分る。

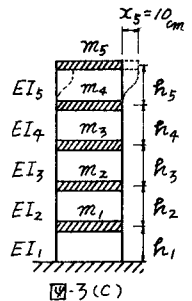


図3(c)

$\alpha_0 = 1.0$ $\beta = 0.05$ $\Delta t = 0.5 \text{ sec}$ Case 1
 $\omega = 0.0$ $\omega = 1.0$

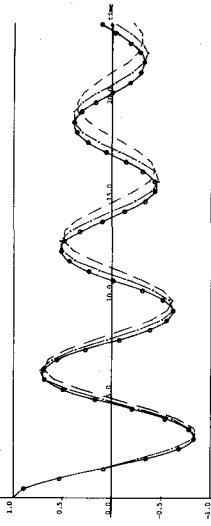


Figure 1: Free vibration response of the top floor. The plot shows displacement versus time for two cases: $\omega = 0.0$ (solid line) and $\omega = 1.0$ (dashed line). The x-axis ranges from 0 to 10 seconds, and the y-axis ranges from -1.0 to 1.0. Both cases show a smooth, sinusoidal oscillation with a period of approximately 2 seconds.

Figure 1: 1自由体系の自由振動

Figure 3(a): Free vibration response of the top floor. The plot shows displacement versus time for two cases: $\omega = 0.0$ (solid line) and $\omega = 1.0$ (dashed line). The x-axis ranges from 0 to 10 seconds, and the y-axis ranges from -1.0 to 1.0. The $\omega = 1.0$ case shows a more complex, non-sinusoidal oscillation compared to the $\omega = 0.0$ case.

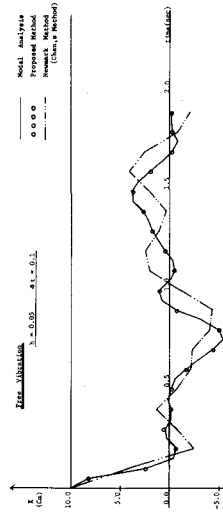
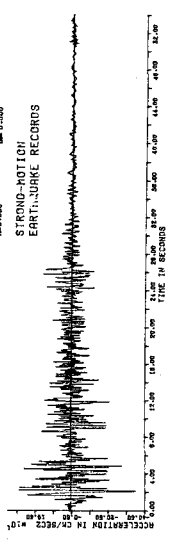


Figure 3(b): Free vibration response of the top floor. The plot shows displacement versus time for two cases: $\omega = 0.0$ (solid line) and $\omega = 1.0$ (dashed line). The x-axis ranges from 0 to 10 seconds, and the y-axis ranges from -1.0 to 1.0. The $\omega = 1.0$ case shows a highly irregular, non-sinusoidal oscillation.

EL CENTRO NS 1940



EL CENTRO NS 1940

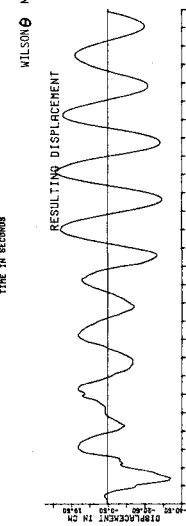
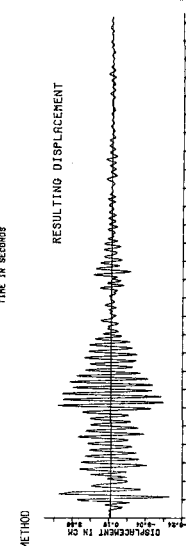
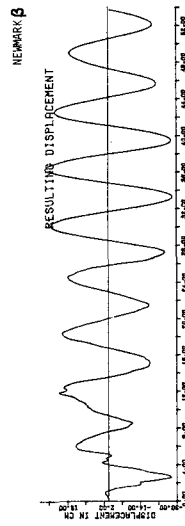
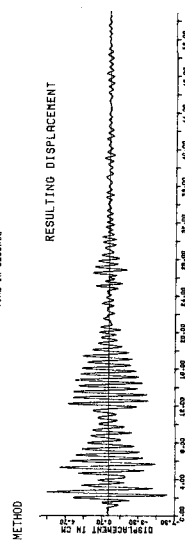
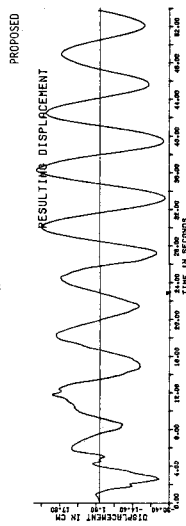
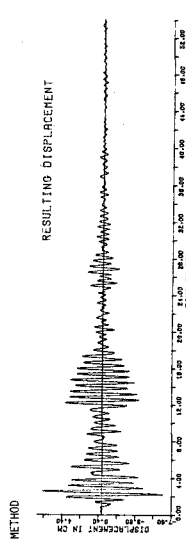
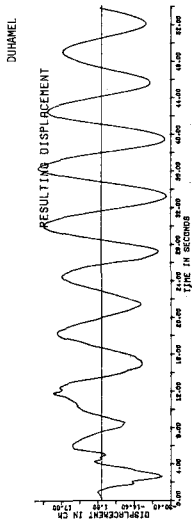
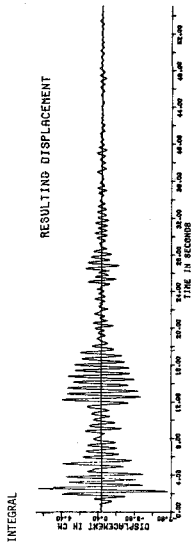
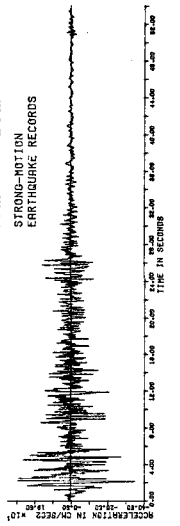


Figure 2(a): 1自由体系の強制振動 $\omega = 1.0$ $\beta = 0.05$

Figure 2(b): 1自由体系の強制振動 $\omega = 1.0$ $\beta = 0.05$