I-156　非定常不規則外力を受ける構造物系の自乗平均応答

長崎大学工学部　正員　岡林隆敏

１．まえがき　土木構造物に作用する外力の多くは不規則な荷重であり，さらにそれは，振巾の包絡線や周波数特性が時間と供に変化する非定常不規則過程と考えられる。本研究においては，このような外力として，振巾の包絡線を表わす形状関数と任意のパワースペクトラムを持つ定常確率過程の積によって構成される非定常不規則過程と仮定し，構造物系を１自由度系とした場合について，系の自乗平均応答を求めるための基礎式である共分散方程式を誘導した。さらに計算例として，形状関数が指数関数の場合について，解析解と本法による数値解析による結果を比較し，さらに実際の地震外力が作用した場合の自乗平均応答の計算を行った。

２．構造物系作用する外力のモデル化　一般的な非定常確率過程の近似として，振巾の包絡線のみが時間的に変化する確率過程 $f(t)$ を考え，さらに，これは特定のパワースペクトラムを持つ定常確率過程 $z(t)$ と包絡線の時間的変化を表わす確定関数である形状関数 $g(t)$ との積で表現されるものとする。[1]　$f(t) = z(t)\cdot g(t)$　(1)

特定のパワースペクトラムを持つ定常確率過程は，白色雑音が特定の系に作用した時の定常応答として得ることができる。このような系をフィルター系と称すると，フィルター系は一般に次式で記述され，非定常確率過程は(1)，(2)式で構成される。

$$\left.\begin{aligned}\dot{y}_1(t) &= a_{11}y_1(t) + \cdots + a_{1n}y_n(t) + C_1 n_1(t)\\ &\cdots\cdots\\ \dot{y}_n(t) &= a_{n1}y_1(t) + \cdots + a_{nn}y_n(t) + C_n n_n(t)\end{aligned}\right\}\quad (2.1)$$

$$z(t) = b_1 y_1(t) + b_2 y_2(t) + \cdots + b_n y_n(t)\quad (2.2)$$

$a_{11}\cdots a_{nn}$，$C_1\cdots C_n$，$b_1\cdots b_n$，はフィルター出力のパワースペクトラムの形状を決定するシステムパラメーター。

Fig 1 はこのような外力と構造物の関係をブロック線図で示したものである。

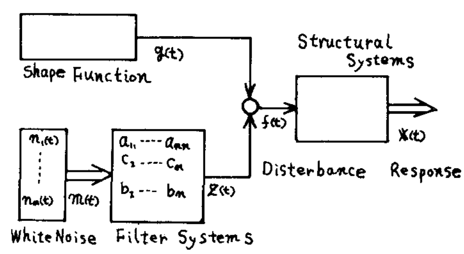

Fig 1

３．基礎式の誘導（共分散方程式）　１自由度系の運動を表わす方程式は次式で与えられる。

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f(t)\quad (3)$$

ただし，ξ；減衰定数，ω；固有円振動数。(1)，(2)，(3)式を状態空間でベクトル表示するために，次のような変数ベクトルを考える。

$$\mathbb{X}(t) = \{x,\ \dot{x},\ y_1,\ \cdots\cdots,\ y_n\}^T = \{x_1,\ x_2,\ y_1,\ \cdots\cdots\ y_n\}^T\quad (4)$$

ただし，$\{\ \}^T$ はベクトルの転置である。(1)，(2)，(3)式はベクトル表示すれば次式になる。

$$\dot{\mathbb{X}} = \mathbb{A}(t)\mathbb{X}(t) + \mathbb{D}\mathbb{W}(t)\quad (5)$$

ただし，$\mathbb{A}(t)$，$\mathbb{D}$，$\mathbb{W}(t)$ は次式で表わされる，さらに(2-1)式のフィルター方程式をベクトル表示すると(7)式になる。

$$\dot{\mathbb{X}}_f(t) = \mathbb{A}_f\mathbb{X}_f(t) + \mathbb{D}_f\mathbb{W}_f(t)\quad (7)\qquad \mathbb{X}_f(t) = \{y_1(t),\ \cdots\cdots,\ y_n(t)\}^T\quad (8)$$

ただし，$\mathbb{A}_f$，$\mathbb{D}_f$，$\mathbb{W}_f(t)$ は次式で表わされる。

$$\mathbb{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -\omega^2 & -2\xi\omega & g(t) & \cdots & g(t)\\ 0 & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\quad \mathbb{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & C_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_n\end{bmatrix}\quad \mathbb{W}(t) = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ n_1(t)\\ \vdots\\ n_n(t)\end{bmatrix}\quad (6)$$

(5)式と(7)式に対応する共分散方程式は次式で与えられる。

$$\dot{\mathbb{R}}(t) = \mathbb{A}\mathbb{R}(t) + \mathbb{R}(t)\mathbb{A}^T(t) + \mathbb{D}\mathbb{Q}\quad (10)$$

$$A_f = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad D_f = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \qquad v(t) = \begin{bmatrix} n_1(t) \\ \vdots \\ n_n(t) \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\dot{R}_f = A_f R_f(t) + R_f(t) A_f^T + D_f Q_f \tag{11}$$

ただし $R(t) = E[(X(t)-E[X(t)])(X(t)-E[X(t)])^T]$，しかし $E[X(t)]=0$ と考えられるので $R(t)=E[X(t)\cdot X^T(t)]$。E[ ]は集合平均である。同様に $R_f(t)$ は $E[X_f(t)\cdot X_f(t)]$ である。Q，Q_f は次式で与えられる。ただし，S_i は $n_i(t)$ の白色雑音のパワースペクトラム。従って $R_f(t)$ は $R(t)$ と独立に求められるので $R(t)$ は次のように分割される。

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & S_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & S_n \end{bmatrix} \qquad Q_f = \begin{bmatrix} S_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & S_n \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$R(t) = \left[\begin{array}{c|c} R_{xx}(t) & R_{fx}(t) \\ \hline R_{xf}(t) & R_{ff}(t) \end{array}\right] \tag{13}$$

$R_{xx}(t)$；(2×2) の振動系に関する対称な共分散行列，$R_{fx}(t)$，$R_{xf}(t)$；(2×n)，(n×2) の振動系とフィルター系の共分散行列，$R_{ff}(t)$；(n×n) のフィルター系の共分散行列。ところがフィルター系は定常であるので，$\dot{R}_f = 0$ となり，(11)式は次式で与えられる代数方程式になる。

$$A_f R_f + R_f A_f^T + D_f Q_f = 0 \tag{14}$$

従って，次の微分方程式に(14)式より求めた R_f を代入することにより，振動系の応答の共分散を得ることができる。ただし，$[\ ]_2$ は $(n+2)\times 2$ の行列を表わしている。

$$\begin{bmatrix} \dot{R}_{xx}(t) \\ \dot{R}_{xf}(t) \end{bmatrix} = \left[A(t)R(t)\right]_2 + \left[R(t)A^T(t)\right]_2 + \left[DQ\right]_2 \tag{15}$$

4．計算例　定常確率過程 $z(t)$ は次式で与えられる自己相関関数を持ち，形状関数 $g(t)$ は指数関数である場合の1自由度系の自乗平均応答を計算する。

$$R_z(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta|\tau|}\cos\Omega\tau \quad (16\text{-}1) \qquad g(t) = e^{-\alpha t} \quad (16\text{-}2)$$

$z(t)$ はフィルター系に白色雑音が作用した時の定常解として得ることができて，そのような系は次の微分方程式で記述される。

$$\ddot{y}(t) + 2\beta\dot{y}(t) + (\Omega^2+\beta^2)y(t) = n(t) \quad (17\text{-}1) \qquad z(t) = \sqrt{2\beta}\left((\beta^2+\Omega^2)^{1/2}y(t) - \dot{y}(t)\right) \quad (17\text{-}2)$$

ただし，$n(t)$ は σ^2 の分散を持つ白色雑音であるが，この計算において $\sigma^2=1$ とする。

この場合の共分散方程式は次式で与えられる。ただし，$a_1=\omega^2$，$a_2=2\zeta\omega$，$b_1=(\Omega^2+\beta^2)$，$b_2=2\beta$，$c_1=\sqrt{b_1b_2}$，$c_2=\sqrt{b_2}$，$d=g(t)$

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{E}[x_1^2] = 2E[x_2x_1] \qquad \dot{E}[x_1x_2] = -a_1E[x_1^2] - a_2E[x_1x_2] + E[x_2^2] + dc_1E[x_1y_1] - dc_2E[x_1y_2] \\
&\dot{E}[x_2^2] = -2a_1E[x_1x_2] - 2a_2E[x_2^2] + 2dc_1E[x_2y_1] - 2dc_2E[x_2y_2] \qquad \dot{E}[x_1y_1] = E[x_2y_1] + E[x_1y_2] \\
&\dot{E}[y_1x_2] = -a_1E[y_1x_1] - a_2E[y_1x_2] + E[y_2x_2] + \sigma^2 d/2c_1 \qquad \dot{E}[y_2x_1] = -b_1E[x_1y_1] - b_2E[x_1y_2] + E[x_2y_2] \\
&\dot{E}[y_2x_2] = -b_1E[x_2y_1] - a_1E[y_2x_1] - (a_1+b_1)E[y_2x_2] - \sigma^2 d/2c_2
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Fig 2，Fig 3 は各々図中の条件について，解析解と共分散方程式による数値解析の結果を比較したものであるが，極めて良く一致していることがわかる。通常，形状関数を階段関数で近似して従来の積分による方法を適用しているが[2] この手法と比較して，共分散方程式による解法は容易にかつ精度良く計算できることを示している。実際の地震を入力とした場合の応答については，講演当日発表する。

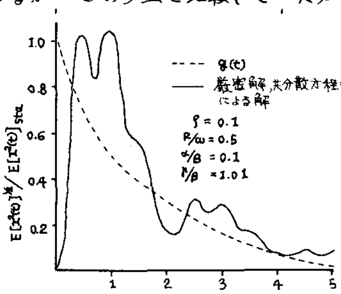

Fig 2

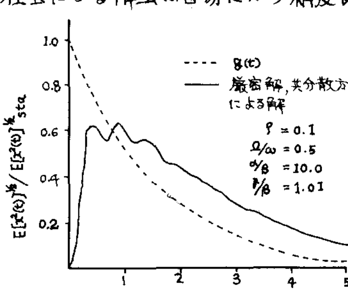

Fig 3

参考文献

[1] B.C. Liu；Evolutionary Power Spectral Density of Strong Motion Earthquakes, Bull. Seism. Soc. Am. Vol 60 No.3 1970

[2] T.Hasselman；Linear Response to Nonstationary Random Excitation. EM3, ASCE, June, 1972