I-150　連続曲線桁における曲率面内変位の影響

秋田大学 土木工学科 正員　稼農 知徳
秋田大学 土木工学科 正員　薄木 征三
秋田大学 土木工学科 学生員　○滝内 健仁

1. まえがき　曲線桁の基礎弾性方程式は任意の座標軸の変位に関して求めると，曲率面内変位と曲率面外変位が連成し，4元連立微分方程式として得られることはすでに知られている。一般に橋梁で用いられる曲線桁は曲率面外荷重のみが作用するものとし，軸方向力と曲率面内の曲げモーメントを無視して曲率面内と曲率面外に関する弾性方程式に分離し曲率面外変位に関する2元連立微分方程式を解いて解析されている。一般に曲線桁では，荷重の種類，支点条件および断面諸量の値が曲率面内における変位と曲率面外への変位との連成を左右している。例えば，一般荷重と支点条件に対して任意軸に関する変位で表わした弾性方程式で曲線桁の断面が曲率面に平行な軸に関して対称な場合には連成項における断面諸量（S_y, J_{xy}, C_x）はすべて零となり完全に分離独立する。これ以外の場合には連成項の断面諸量がすべて零となることはない。橋梁に用いられる曲線桁の断面では曲率面に平行な軸に関して対称な場合とは上下フランジが等しいI形断面と上下フランジ板厚が等しく上フランジ張出し部のない箱断面に限られる。また冒頭に述べた曲線桁の場合でも，曲率面内変位は生ずるので曲率面内の断面力が零となる条件は両端単純支持の場合に限られ連続曲線桁などでは厳密性を欠いている[1]。そこで連続曲線桁などに適用した場合，この理論的には厳密性を欠く上述の2元連立微分方程式が実用上いかなる精度をもっているか考察したものである。この目的のためには著者らが導いた薄肉断面曲線桁の剛性マトリックス[2]を用いると曲率面内変位と曲率面外変位との連成について明白に説明出来，任意軸の変位に関して任意の荷重，支点条件のもとで曲線桁の解析が容易に出来ることになる。

2. 薄肉断面曲線桁の剛性マトリックス　図-1(a)に示す曲線桁要素i-jに対して円柱座標系(O'-ρ, θ, ζ)と右手系直角座標系(i-x, y, z)を用いる。軸線i-jは断面の任意の点を通る母線である。軸線i-jの変位u, v, wおよびφを3次のべき級数で近似して，仮想仕事の原理を用いると，次の方程式が得られる。

$$\{P\} = \int_V [B]^T[D][B]\,dV \cdot \{\delta\} = [K]\{\delta\} \quad (1)$$

$$[K] = \int_0^{\Phi}\int_F [B]^T[D][B]\,t\,ds\,\rho\,d\theta \quad (2)$$

ここで，

$[B]$は2×14マトリックスで各要素はx, y, ω, θの関数である。また，$[D] = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}$で部材要素の弾性係数マトリックスである。$\{P\}$および$\{\delta\}$は節点力および節点変位ベクトルで式(3)に示すとおりである。

$$\left.\begin{aligned} \{\delta\} &= [u_{xi}\ v_{yi}\ w_{zi}\ \phi_{xi}\ \phi_{yi}\ \varphi_i\ \psi_{zi}\ u_{xj}\ v_{yj}\ w_{zj}\ \phi_{xj}\ \phi_{yj}\ \varphi_j\ \psi_{zj}]^T \\ \{P\} &= [Q_{xi}\ Q_{yi}\ N_{zi}\ M_{xi}\ M_{yi}\ T_{zi}\ M_{\omega i}\ Q_{xj}\ Q_{yj}\ N_{zj}\ M_{xj}\ M_{yj}\ T_{zj}\ M_{\omega j}]^T \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$[K]$は求める剛性マトリックスで14×14正方マトリックスである。詳細は文献2)を参照のこと。ここでは要素の配列を曲率面外変位に関するものと曲率面内変位に関するものとに再配列した分割マトリックスで示すと，式(1)は式(4)のように表わされる。

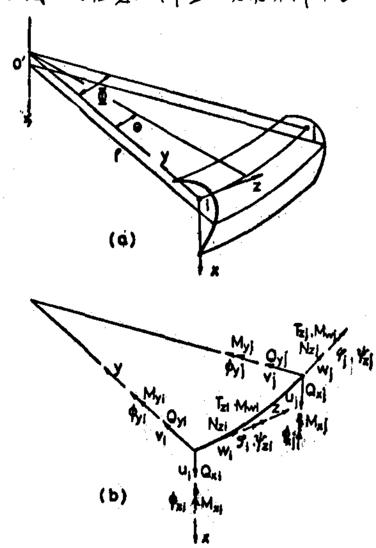

図-1 曲線桁の座標系と節点力，節点変位

$$\begin{Bmatrix} P_\alpha \\ \hline P_\beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha\beta} \\ K_{\beta\alpha} & K_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_\alpha \\ \hline \delta_\beta \end{Bmatrix} \quad (4)$$

ここで，

$$\left.\begin{aligned} \{P_\alpha\} &= [Q_{xi}\ M_{yi}\ T_{zi}\ M_{\omega i}\ Q_{xj}\ M_{yj}\ T_{zj}\ M_{\omega j}]^T \\ \{P_\beta\} &= [Q_{yi}\ N_{zi}\ M_{xi}\ Q_{yj}\ N_{zj}\ M_{xj}]^T \\ \{\delta_\alpha\} &= [u_{xi}\ \phi_{yi}\ \varphi_i\ \psi_{zi}\ u_{xj}\ \phi_{yj}\ \varphi_j\ \psi_{zj}]^T \\ \{\delta_\beta\} &= [v_{yi}\ w_{zi}\ \phi_{xi}\ v_{yj}\ w_{zj}\ \phi_{xj}]^T \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

剛性マトリックス$[K]$の各小マトリックスは式(6)のように，断面諸量の関数である。

$$[K_{\alpha\alpha}] = [K_{\alpha\alpha}(J_y, C_y, J_\omega, J_T)],\quad [K_{\beta\beta}] = [K_{\beta\beta}(F, Z_x, J_z)],$$
$$[K_{\alpha\beta}] = [K_{\beta\alpha}] = [K_{\alpha\beta}(Z_y, J_{xy}, C_x)] \qquad (6)$$

ここで断面諸量は式(7)のように定義されている。

$$F = R\int_F \frac{1}{\rho}dF,\quad Z_y = R\int_F \frac{1}{\rho}x\,dF,\quad Z_x = R\int_F \frac{1}{\rho}y\,dF,\quad J_x = R\int_F \frac{1}{\rho}y^2 dF,$$
$$J_y = R\int_F \frac{1}{\rho}x^2 dF,\quad J_T = \int_F \frac{\rho}{R}\left\{\frac{R}{\rho}r_s - \rho\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\omega}{\rho}\right)\right\}^2 dF,\quad C_x = R\int_F \frac{1}{\rho}\omega y\,dF,$$
$$C_y = R\int_F \frac{1}{\rho}\omega x\,dF,\quad J_\omega = R\int_F \frac{1}{\rho}\omega^2 dF \qquad (7)$$

3. 剛性マトリックスの特性に関する考察　式(4)は任意軸に関する剛性マトリックスであるが，今(1)軸線 i-j が中立軸の場合には，$Z_x = Z_y = 0$，さらに x, y 軸が主軸の場合には，$J_{xy} = 0$ となる。また，(2)軸線 i-j がせん断中心軸の場合には，$C_x = C_y = 0$ である。任意軸あるいは(1)(2)いずれの場合においても断面が曲率面に平行な軸(y 軸)に関して対称な場合には，$Z_y = J_{xy} = C_x = 0$ となり，$[K_{\alpha\beta}] = 0$ より，$\{P_\alpha\} = [K_{\alpha\alpha}]\{\delta_\alpha\}$ として独立する。以上のことは曲率面外荷重のみが作用するときでも，(1)の場合には $J_{xy} = C_x \neq 0$，主軸に選んでも $C_x \neq 0$，(2)の場合には，$Z_y = J_{xy} \neq 0$ となりいずれも $[K_{\alpha\beta}]$ はある値をもつことになる。即ち曲率面内変位を生ずる。ただし曲率面内荷重がない場合には $\{P_\beta\} = 0$ であるから $\{P_\alpha\} = ([K_{\alpha\alpha}] - [K_{\alpha\beta}][K_{\beta\beta}]^{-1}[K_{\beta\alpha}])\{\delta_\alpha\}$ となって連成しないが，$\{\delta_\beta\} = -[K_{\beta\beta}]^{-1}[K_{\beta\alpha}]\cdot\{\delta_\alpha\}$ として曲率面内変位が生ずるので支点条件によっては曲率面内力も生じてくる。曲線桁の断面諸量が直線桁のそれと等しいとみなせる場合，x 軸に対称な断面では軸 i-j が中立軸の場合，$Z_x = Z_y = J_{xy} = C_y = 0$, $C_x \neq 0$，軸 i-j がせん断中心軸の場合，$Z_x = J_{xy} = C_x = C_y = 0$, $Z_y \neq 0$ となって，いずれも $[K_{\alpha\beta}]$ はある値をもち，曲率面内荷重のない場合でも曲率面内変位 $\{\delta_\beta\}$ を生ずる。

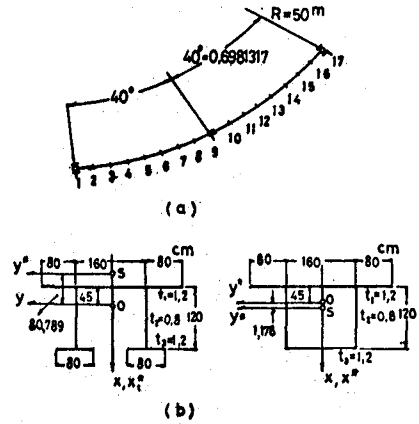

図-2 連続曲線桁と断面形状寸法

表-1 連続曲線桁の断面諸量

断面諸量		F cm²	Zx cm³	Zy cm³	Jx cm⁴	Jy cm⁴	Cx cm⁵	Cy cm⁵	Jw cm⁶	Jz cm⁴
中立軸に関する表示	開断面	0.768×10²	0	0	5.3368×10⁶	2.1312×10⁶	4.7155×10³	0	5.5688×10¹⁰	3.1744×10²
	閉断面	0.768×10³	0	0	4.9152×10⁶	2.1312×10⁶	5.7880×10⁶	0	8.3310×10⁸	2.6025×10⁶
せん断中心軸に関する表示	開断面	0.768×10³	0	6.2046×10⁴	5.8368×10⁶	7.1438×10⁶	0	0	1.7592×10¹⁰	3.1744×10²
	閉断面	0.768×10³	0	9.0448×10²	4.9152×10⁶	2.1323×10⁶	0	0	8.2627×10⁸	2.6025×10⁶

4. 数値計算例　図-2の x 軸を対称軸にもつ開·閉断面連続曲線桁を解析する。断面諸量は表-1に示す。計算はせん断中心軸に関して求めたものを示すと，図-3は開断面連続曲線桁の格点5におけるたわみと曲げモーメント影響線を示す。図-4は閉断面連続曲線桁の格点5におけるたわみと曲げモーメント影響線を示す。いずれも実線は曲率面内変位を無視した場合，点線は考慮した場合である。開断面の場合にはかなりの影響がみられるが，閉断面については全く其の影響が小さいことが分る。

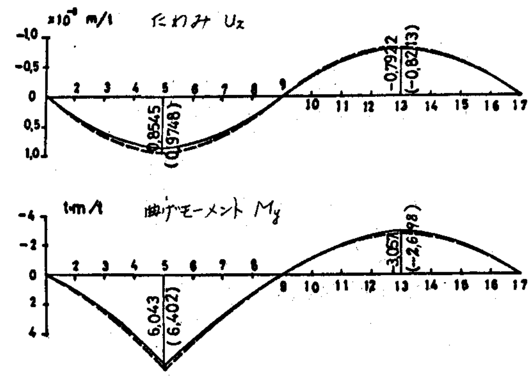

図-3. 開断面連続曲線桁格点5のたわみと曲げモーメント影響線

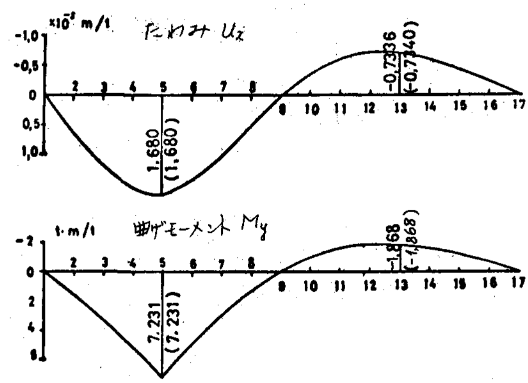

図-4. 閉断面連続曲線桁格点5のたわみと曲げモーメント影響線

参考文献

1) 西野·倉方：「曲げねじれ剛性をもった曲線桁橋の剛性マトリックス法による解析」への討議」土木学会論文報告集 No. 229.
2) 薄木·穂農：「薄肉断面曲線桁の変形法による解析」土木学会論文報告集 No. 235.